18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

ÇÖZÜMLER 1

İlk dört problem küçük L_p uzayları olarak'ta anılan l^p uzayları hakkındadır. Çözümleri l_2 için verebileceğiniz gibi her p,$1 \leq p \leq \infty$ için de verebilirsiniz.

Problem 1.1 Her $p, 1 \leq p < \infty$ veya sadece $p = 2$ için;

$$l^p = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty, a_j = a(j)\}$$

dizilerinin aşağıdaki normla,

$$||a||_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p)^{1/p}$$

normlu bir uzay olduğunu gösteriniz. Bu tanımlanan dizilerin bir vektör uzayı olduklarını ve tanımlanan normun norm olmak için sağlaması gereken üç koşulu sağladığının gösterilmesi demektir.

Çözüm: Herhangi bir kümeden değerlerini bir vektör uzayında alan fonksiyonların vektör uzayı olduğunu biliyoruz- buradaki toplama işlemi değerlerin toplamı biçimindedir. Dolayısı ile l^p'nin vektör uzayı olabilmesi için toplama ve skalerler ile çarpma işlemleri altında kapalı olması gerekiyor. Skalerler ile çarpma işlemi altında kapalılığı göstermek kolay:

$$|ta_i| = |t||a_i| \Rightarrow ||ta||_p = |t|||a||_p \tag{3.18}$$

Bu zaten $||.||_p$ ifadedesinin norm olduğunu göstermekte gerekliydi. l^p de olan a, b dizilerin toplamı $a + b$ nin de l^p olması üçgen eşitsizliğinin uygulaması ile elde edilir. Ama $0 \leq t$ için t^p fonksiyonunun artan olduğunu kullanarak;

$$|a_i + b_i|^p \leq (2maks(|a|_i, |b|_i))^p = 2^p maks(|a_i|^p, |b_i|^p) \leq 2^p(|a_i| + |b_i|) \tag{3.19}$$

Buradan da

$$||a + b||_p^p = \sum_j |a_j + b_j|^p \leq 2^p(||a||^p + ||b||^p)$$

elde edilir. l^p nin norm uzayı olduğunu kanıtlamak için $||a||_p$ nin gerçekten bir norm olduğunu kanıtlamalıyız. $||a||_p$ sıfır'dan küçük değerler alamaz. Eğer $||a||_p = 0$ ise, bu her i için, $a_i = 0$ demek olacağından, $a = 0$ buluruz. Geriye kalan tek husus ise üçgen eşitsizliğinin sağlandığıdır. Eğer $p = 1$ ise, istenilen, mutlak değer fonksiyonunun üçgen eşitsizliğini sağlamasından elde edilir:

$$||a+b||_1 = \sum_i |a_i + b_i| \leq \sum_i (|a_i| + |b_i|) = ||a||_1 + ||b||_1 \tag{3.20}$$

p'nin $1 \leq p \leq \infty$ değerleri için kanıtlamamız gereken eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği adı verilir. Minkowski eşitsizliği, Young eşitsizliği olarak tanınan eşitlikten elde edilen Hölder eşitsizliğinin bir sonuçudur. Young eşitsizliği, $1/p + 1/q = 1$ için dolayısı ile $q = p/(p-1)$ dir.

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \forall \alpha, \beta \geq 0 \tag{3.21}$$

Bunu görmek için, $\alpha = x$ fonksiyonu olarak,

$$f(x) = \frac{x^p}{p} - x\beta + \frac{\beta^q}{q} \tag{3.22}$$

Bu fonksiyon $x = 0$'da negatif değildir ve $x > 0$ değerleri için x^p, $x\beta$ dan daha hızlı büyüdüğü için, pozitiftir. Dahası türevlenebilir bir fonksiyondur ve türevi olan x^{p-1} sadece β da sıfır olup, burada $x > 0$ için bir mutlak minimum değerine sahiptir. Bu noktada $f(x) = 0$ olduğundan Young eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliği, $\alpha = |a_i|/||a||_p$, $\beta = |b_i|/||b||_q$ (kuşkusuz iki sayı da sıfırdan farklı kabul edilmektedir) sayıları için kullanıp, i üzerinden toplam alarak Hölder eşitsizliğini (3.23)

$$|\sum_i a_i b_i|/||a||_p||b||_q \leq \sum_i |a_i||b_i|/||a||_p||b||_q \leq \sum_i (\frac{|a_i|^p}{||a||_p^p p} + \frac{|b_i|^q}{||b||_q^q q}) = 1$$

ve buradan da

$$\Rightarrow |\sum_i a_i b_i| \leq ||a||_p ||b||_q$$

buluruz. Şimdi buradan, üçgen eşitsizliği ve birinci çarpanda q kuvveti alarak, Minkowski eşitsizliğini elde ederiz.

$$\sum_i |a_i + b_i|^p \leq \sum_i |a_i + b_i|^{(p-1)} |a_i + b_i| \tag{3.24}$$

$$\sum_i |a_i+b_i|^{(p-1)}|a_i| + \sum_i |a_i+b_i|^{(p-1)}|b_i|$$

$$\leq \sum_i (|a_i+b_i|^p)^{1/q}(||a||_p + ||b||_q)$$

İlk çarpanla bölerek, sağ tarafta

$$(3.25) \quad ||a+b||_p \leq ||a||_p + ||b||_p$$

Dolayısıyla, l^p gerçekten normlu bir uzaydır.

Problem 1.2 Problem 1.1 deki zor kısım üçgen eşitsizliği idi. Eğer size her N için

$$(\sum_j^N |a_j|^p)^{1/p}$$

ifadesinin $\mathbb{C}^N$ de norm olduğu verilseydi, bunu kullanabilir miydiniz?

Çözüm: Evet, gerçekten her N için ,

$$(\sum_j^N |a_j+b_j|^p)^{1/p} \leq (\sum_j^N |a_j|^p)^{1/p} + (\sum_j^N |b_j|^p)^{1/p}$$

doğru olsaydı, l^p nin öğelerinin normu için yukarıdaki sağ taraf için bir üst sınır olurdu, yani,

$$(3.27) \quad (\sum_j^N |a_j+b_j|^p)^{1/p} \leq ||a||_p + ||b||_p$$

Sol taraf N sayısının artan değerleri ile arttığından, yakınsar ve üstten, N sayısından bağımsız olan, sağ taraftaki ifade ile sınırlı olur. Bu üçgen eşitsizliğidir. Özetlersek, bu ilk problemdeki us yürütmenin N'den bağımsız olarak tekrarıdır.

Problem 1.3 Problem 1.1 de tanımlanan l^p nin ya da l^2 nin tam olduğunu kanıtlayınız. Yani Banach uzayı olduğunu gösteriniz. Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. Burada problem verilen Cauccy dizisinin limitini bulmaktır. Her N için N noktasında budanmayla elde edilen $\mathbb{C}^N$ deki her dizinin $\mathbb{C}^N$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: l^p uzayında Cauchy dizisi olan $a^{(n)}$ alalım. Dizideki her öğe yine l^p de olan, $\{a_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisidir. Aşağıdaki Problem 1.5 de kanıtlanacak olan normun sürekliliğinden,$||a^{(n)}||$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir ve yakınsar. Buradan bu dizinin sınırlı olduğunu elde ederiz. Yani bir A sayısı ve her n için $||a^{(n)}||_p \leq A$ vardır. Cauchy tanımından verilen $\epsilon > 0$ için, öyle bir M sayısı vardırki her $m, n > M$ için

$$(3.28) \quad ||a^{(n)} - a^{(m)}||_p = (\sum_i |a_i^{(n)} - a_i^{(m)}|^p)^{1/p} < \epsilon/2$$

Her i damgası için $|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq ||a^{(n)} - a^{(m)}||_p$ sağlandığından, $a_i^{(n)}$ dizisi $\mathbb{C}$'de Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan, her i = 1,2,... için

$$(3.29) \quad lim_n a_i^{(n)} = a_i$$

vardır. Verilen dizinin limiti için aday, $a = (a_i)$ dizisidir. Normların sınırlılığı,

$$(3.30) \quad \sum_i^N |a_i^{(n)}|^p \leq A^p$$

verir, burada $n \to \infty$ iken limit alarak

$$(3.31) \quad \sum_i^N |a_i^{(n)}|^p \leq A^p, \forall N \Rightarrow ||a||_p \leq A$$

bulunur. Dolayısı ile $a \in l^p$ bulundu. Benzer biçimde Cauchy koşulundaki sonlu eşitsizlikte $m \to \infty$ iken limit alarak,

$$(3.32) \quad (\sum_{i=1}^N |a_i^{(n)} - a_i^{(m)}|^p)^{1/p} < \epsilon/2$$

elde ederiz.Dolayısıyla, her N için

$$(3.33) \quad (\sum_i^N |a_i^{(n)} - a_i|^p)^{1/p} \leq \epsilon/2$$

bulur ve buradan da

$$(3.34) \quad ||a^{(n)} - a|| < \epsilon, \forall n > M$$

bulunur ve bu l^p uzayında, $a^{(n)} \to a$ demektir.

Problem 1.4 İsterseniz $n = 2$ alabilirsiniz, l^p uzayının birim yuvarı S kümesini düşünelim. Bu küme uzunlukları 1 olan vektörlerin kümesidir.

$$S = \{a \in l^p : ||a||_p = 1\}$$

kümesidir.
(1) S kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
(2) Dilerseniz Rudin'nin kıtabına da bakarak, metrik uzaylarda kompakt kümelerin dizisel betimlenişini anımsayınız.
(3) Dilerseniz n-inci yerde 1, kalan koordinatlarda 0 olan diziyi düşünerek S kümesinin kompakt olmadığını kanıtlayınız.

*Çozum:*Bir sonraki alıştırmada ele alınan, normun sürekliliği ve S kümesinin kapalı $\{1\}$'in kümesinin ters görüntüsüne eşit olmasından, S kapalıdır.

Anımsanmasını istediğimiz sonuç, metrik uzaylarda bir altkümenin kompakt olması için gerek ve yeter koşulun kümedeki her dizinin yine küme içinde yakınsayan bir altdizisinin olmasıdır.

Bu durumda aşağıdaki diziler dizisini ele alalım:

$$(3.36) \quad a_i^{(n)} = \begin{cases} 0, & , i \neq n \\ 1, & , i = n \end{cases}$$

Bu dizinin $n \neq m$ için, $||a^{(n)} - a^{(m)}||_p = 2^{1/p}$ özelliği vardır. Bu nedenle hiç bir Cauchy altdizisi olamaz. Bu nedenlede yakınsak değildir. Bu da S kümesinin kompakt olamıyacağını verir.

Bu sonuç önemlidir. Sonlu ve sonsuz boyutlu normlu uzaylar arasındaki temel farklılığı gösterir. Sonlu boyutlu uzaylarda Heine-Borel teoreminden birim yuvar kompakt, sonsuz boyutlu uzaylarda ise kompakt değildir.

Problem 1.5 Normlu her uzayda, norm süreklidir.

Çözüm: Esasına bakarsanız bu problemi çok daha önce ele almalıydık! Üçgen eşitsizliği normlu bir uzaydaki u, v vektörleri için

$$(3.37) \quad ||u|| \leq ||u - v|| + ||v||, ||v|| \leq ||u - v|| + ||u||$$

verir, buradan da

$$(3.38) \quad ||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$$

bulunurki, bu normun sadece sürekliliğini değil aynı zamanda Lipschitz sürekliliğini de verir.