18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

PROBLEMLER 2

Problem 2.1 10 Şubat da dersde inşa edilmiş olan uzayın tam olduğu konusundaki kanıtı tamamla. Bu inşanın betimlenmesi Ders 3'de bulunacağı gibi gösterilen yol izlenerek de yapılabilir.

Problem 2.2. Basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir dizileri örneğine bakalım. $[0,1)$ aralığı için (sağdan kapalılık ve soldan açıklık seçimi konusunda kuvvetli bir tercih olduğunu hatırla) bir çeşit standart Cantor altkümesinin, basamaklardaki 3 işlemini gözönüne alalım. Yani 'merkez aralık $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ aralığını çıkar. Geriye $C_1 = [0,\frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3},1)$ kalacak. Kalan aralıkların herbirinin merkez aralıklarının çıkarılmasıylada $C_2 = [0,\frac{1}{9}) \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}) \cup [\frac{8}{9},1)$ kümesi elde edilir. Bu yol takip edilerek $C_k \subset C_{k-1}$ özelliğinde her biri sonlu tane yarı-açık aralıkların birleşimi olan kümeler elde ederiz. Şimdi C_k üzerinde $f_k(x) = 1$, diğer durumlarda 0 olan f_k basamak fonksiyonlarının *serisini* ele alalım.

(1) Bu serinin mutlak toplanabilir olduğunu kontrol et.

(2) Hangi $x \in [0,1)$ için $\sum_k |f_k(x)|$ yakınsaktır.

(3) Bu serinin varlığı yardımıyla $[0,1)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir (Ders 4 de tanımlandığı gibi) bir fonksiyon tanımla ve bunun Lebesgue integralini hesapla.

(4) Bu fonksiyon Riemann integrallenebilir midir (Riemann integralin tanımı hatırlanırsa o kadar zor değil)?

(5) Son olarak çıkartılan kümelerin birleşimleri üzerinde 1 ve diğer yerlerde sıfır olan g fonksiyonu ele alalım. g'nin Lebesgue integrallenebilir olduğunu göster ve integralini hesapla.

Problem 2.3 $\mathbb{R}^2$ için örtme lemması. $\mathbb{R}^2$ nin $[a_1,b_1) \times [a_2,b_2)$ biçimindeki altkümesine bir dikdörtgen diyeceğiz. Bu dikdörtgenin alanı $(b_1-a_1)\times(b_2-a_2)$ olarak tanımlanır. (1) Aralıkları altaralığa bölerek bir dikdörtgeni altdikdörtgenlere ayırabiliriz.-$[a_1,b_1)$'i $[a_1,b_1)\cup[a_2,b_2)]$ ile değiştirerek. Bir dikdörtgenin alanının altdikdörgenlerinin alanlarının toplamınına eşit olduğunu gösteriniz.

(2) Sonlu ve ayrık dikdörtgenlerin birleşiminin bir dikdörtgen olduğunu varsayalım (her zaman aynı yarı-açık anlamında). Ayrık dikdörtgenlerin alanlarının toplamının birleşimlerinin oluşturduğu dikdörtgenin alanı olduğunu gösteriniz (Yardımcı görüş: altbölme işlemini uygula).

(3) Bireleşimleri bir dikdörtgen içrisinde kalan sayılabilir ayrık dikdörtgenler topluluğunun alanlarının toplamı içinde kalan dikdörtgenin alanının toplamından küçük ya da eşit olduğunu gösteriniz.

(4) Sonlu dikdörtgenler topluluğunun alanlarının toplamı, birleşimleri içrisinde her dikdörtgenin alanından büyük yada eşit olduğunu gösteriniz.

(5) Önceki sonuçta geçen işlemi sayılabilir dikdörtgenlerin birleşimleri içerisinde kalan dikdörtgenler için genişletilebileceğini kanıtlayınız.

Problem 2.4

(1) $[0,1]$ aralığındaki tanımlı sürekli her fonksiyonun $[0,1)$ aralığında tanımlı basamak fonksiyonların *düzgün limiti* olduğunu gösteriniz. (Yardımcı görüş:- reel duruma indirgeme, aralığı 2^n eşit aralığa böl ve basamak fonksiyonu her bir bölünen aralıkta sürekli fonksiyonun infimum değeri olarak tanımla. Sonra düzgün yakınsamayı kullan.

(2) 'teleskopik hüner (telescoping trick)' yöntemini kullanarak sürekli her fonksiyonun, f_j ler her $x \in [0,1)$ için $\sum_i |f_j(x)| < \infty$ koşulunu sağlayan basamak fonksiyonları olmak üzere f_j lerin toplami, yani

$$\sum_i f_j(x) \quad x \in [0,1) \tag{3.17}$$

olarak yazılabileceğini gösteriniz.

(3) $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli her fonksiyonun, bu aralık dışında 0 değeri alan genişletilmiş fonksiyonun $\mathbb{R}$ de Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.