Problemler 3'in Çözümleri

Aşağıdaki özellikleri kanıtlamanızı ve bunun yanında daha fazla soyut kanıt vermenizi isteyeceğiz. h.h. eşitliğinin ölçümü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde eşit anlamında olduğunu hatırlayınız.

Problem 3.1 Eğer f ve g, $L^1(\mathbb{R})$ içinde, yani gerçel sayılar üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarsa aşağıdakileri gösteriniz.

(1) Eğer $f(x) \geq 0$ ise $\int f \geq 0$ dır.

(2) Eğer $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f \leq \int g$ dır.

(3) Eğer f karmaşık değerli bir fonksiyon ise gerçel kısmı Ref Lebesgue ölçülebilirdir ve

$$|\int Ref| \leq \int |f|$$

(4) Genel karmaşık değerli bir fonksiyon için

$$(6.30) \quad |\int f| \leq \int |f|$$

gösteriniz.(İpucu: Kaynaklara bakabilirsiniz ama genellikle yapılan şey $\theta \in [0, 2\pi]$ almak ve $e^{i\theta} \int f = \int e^{i\theta} f$ kullanarak, önceki eşitsizliği $g = e^{i\theta} f$ de kullanmaktır.

(5) İntegral

$$(6.31) \quad \int : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

sürekli ve doğrusaldır.

Çözüm.

(1) f gerçel ve f_n, f'ye mutlak yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi (sadece komplex-değerli dizimiz var ise (3)'i kullanınız.) ise

$$(8.14) \quad g_1 = |f_1|, \quad g_j = |f_j| - |f_{j-1}|, \quad f \geq 1$$

dizisinin $|f|$'ye h.h. mutlak yakınsayan yakınsadığını biliyoruz. Buradan $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) = f$, eğer $f \geq 0$ ise, $\frac{1}{2} f_j$ ve $\frac{1}{2} g_j$ ile elde edilen serinin h.h. limitidir:

$$(8.15) \quad h_n = \frac{1}{2} g_k (n = 2k - 1 \quad \text{için}) \quad \text{ve} \quad h_n = f_k \quad (n = 2k \quad \text{için})$$

Böylece f_+ Lebesgue integrallenebilirdir. Üstelik

$$(8.16) \qquad \int f_+ = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\le 2k} \int h_k = \lim_{k\to\infty} \int (\left|\sum_{j=1}^{k} f_j\right| + \sum_{j=1}^{k} f_j)$$

olduğunu biliyoruz. Burada her terim negatif olmayan basamak fonksiyonudur ve dolayısıyla $\int f_+ \geq 0$ dır.

(2) Önceki sonucu integrallenebilir $g - f$'ye uygulayarak

$$(8.17) \qquad \int g - \int f = \int (g-f) \geq 0$$

elde edilir.

(3) Ilk kuralın, f_n kompleks değerli ve f'ye h.h. yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi ise

$$(8.19) \qquad h_{3k-2} = Ref_k, \quad h_{3k-1} = Imf_k, \quad \text{ve} \quad h_{3k} = -Imf_k$$

olarak tanımlayalım. Basamak fonksiyonların serisi mutlak toplanabilirdir ve

$$(8.19) \qquad \sum_n |h_n(x)| < \infty \Longleftrightarrow \sum_n |f_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum_n |h_n(x)| = Ref$$

dır. Böylece Ref integrallenebilirdir. $\pm Ref \leq |f|$ olduğundan

$$(8.20) \qquad \pm \int Ref \leq \int |f| \Rightarrow \left|\int Ref\right| \leq \int |f| \,.$$

(4) Kompleks f için önerildiği gibi yapılır.$z \in \mathbb{C}$'yi $|z| = 1$ ve $z \inf f \in [0,\infty)$ olacak biçimde seçelim. Böyle bir seçim kompleks sayıların özelliğinden yapılabilir. Integralin doğrusallığından
(8.21)

$$\int f = \int (zf) = \int Re(zf) \leq \int |zRef| \leq \int |f| \Rightarrow \int |f| = z \int f \leq \int |f| \,.$$

(Burada geçen ikinci eşitlik integralin gerçel kısmınının integraline eşit olmasından elde edilir.)

(5) h.h. $f = g$ ise $\int f = \int g$ olduğundan

$$(8.22) \quad I : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \quad I([f]) = \int f$$

nın doğrusal olduğunu biliyoruz. Doğrusal fonksiyonun sürekli olması ile sınırlı olması denk olduğundan ve

$$(8.23) \quad |I([f])| = \left| \int f \right| \leq \int |f| = \||[f]\||_{L^1}$$

olduğundan I süreklidir. (Burada $f \in L^1(\mathbb{R})$'nin yerine $[f]$ yazılması doğru fakat daha sonra f yazılacak).

(6) $L^1(\mathbb{R})$'nın dualinin bir elemani olarak I'nın normu nedir? Cevap 1-emin olmanız için kanıtlayabilirsiniz.

Problem 3.2 $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ($(-\infty, a)$ ya da (a, ∞) dahil) ise bir $f : I \to \mathbb{C}$ fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olmasını

$$(8.24) \quad \overline{f} : I \to \mathbb{C}, \quad \overline{f} = f\chi_{\mathbb{R}\setminus I}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun Lebesgue integrallebilir olması olarak tanımlayabiliriz. $\overline{f}$'nın integralini

$$(8.25) \quad \int_I f = \int \overline{f}$$

olarak tanımlarız.

(1) I üzerinde bu anlamda tanımlanan integralin doğrusal olduğunu gösteriniz. Bu tür fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}^1(I)$ ile gösterelim.

(2) f, I üzerinde integrallenebilir ise $|f|$'nin de integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(3) f, I da integrallenebilir ve $\int |f| = 0$ ise h.h. $f = 0$, yani ölçümü sıfır olan bir $E \subset I$ için, her $x \in I \setminus E$ iken $f(x) = 0$, olduğunu gösteriniz.

(4) Daha önceki soruda tanımlanan anlamda h.h. sıfır fonksiyonun vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzayı $\mathcal{N}$ ile gösterelim.

(5) $\int_I |f|$'nın $L^1 = \mathcal{L}^1(I) \setminus \mathcal{N}(I)$ de bir norm tanımladığını kanıtlayınız.

(6) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise

$$(8.26) \quad g : I \to \mathbb{C}, \quad g = f\chi_I$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'de ve dolayısıyla f'nın I da integrallenebilir olduğunu kanıtlayınız.

(7) Yukarıda tanımlanan "I'ya kısıtlama dönüşümü

$$(8.27) \quad L^1(\mathbb{R}) \to L^1(I)$$

örten ve sürekli doğrusal fonksiyonun tanımlar. (Bunların h.h.h eşitlik modülüne göre integrallenebilir fonksiyonların bölüm uzaylarının var olduğunu not ediniz.)

Çözüm:

(1) f ve g fonksiyonları I üzerinde integrallenebilir ve $h = f + g$ ise $\overline{h} = \overline{f} + \overline{g}$ olduğu tanımdandır. Dolayısıyla $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın doğrusallığından $f + g$ fonksiyonu I da integrallenebilirdir. Benzer biçimde eğer $\overline{f}$ integrallenebilir ise herhangi bir sabit c için $h = cf$ olmak üzere $\overline{h} = c\overline{f}$ fonksiyonu integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{L}^1(I)$ doğrusal bir uzaydır.

(2) Yine tanımdan $h = |f|$ ise $\overline{h} = |\overline{f}|$. Buradan f'nın I da integrallenebilir olmasından $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ elde edilir. Bilgilerimizden de $|\overline{f}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Böylece $h = |f|$ ise $\overline{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, dolayısıyla $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$ elde edilir.

(3) $f \in \mathcal{L}^1(I)$ ve $\int_I |f| = 0$ ise $\int_{\mathbb{R}} |\overline{f}| = 0$ dır ve buradan da ölçümü sıfır olan bir $E \subset \mathbb{R}$ için $\mathbb{R} \setminus E$ kümesinde $\overline{f} = 0$ elde edilir. Şimdi $E_I = E \subset I \subset \overline{E}$ kümesinin ölçümü de sıfırdır (sıfır ölçümlü bir kümenin altkümesi olduğundan) ve f, E_I kümesinin dışında sıfırdır.

(4) f ve g lar sıfırımsı fonksiyonlar ise (ölçümü sıfır olan bir küme dışında sıfır değerli anlamında, bu kümelere sırasıyla $E_f \subset I$ ve $E_g \subset I$ diyelim. Yani E_f ve E_g lerin ölçümleri sıfır ve her $a \in I \subset E_f$ ve $b \in I \subset E_g$ için $f(a) = 0, g(b) = 0$.) $f + g$ fonksiyonu $I \subset (E_f \cup E_g)$ üzerinde sıfırdır. $E_f \cup E_g$ kümesinin ölçümü sıfır olduğundan $f + g$ sıfırdır. Aynı şey, c ve d sabit olmak üzere $cf + dg$ fonksiyonları içinde doğrudur, dolayısıyla $\mathcal{N}(I)$ bir doğrusal uzaydır.

(5) $f, g \in \mathcal{N}^1(I)$ olmak üzere g'nin sıfır olduğu yerde $|f + g| - |f|$ fonksiyonu sıfır olduğundan $|f + g| - |f| \in \mathcal{N}(I)$ dır. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(8.28) \quad \int_I |f + g| = \int_I |f| \quad \forall f, g \in \mathcal{N}(I).$$

Buradan da

$$(8.29) \quad \|[f]\|_I = \int_I |f|$$

fonksiyonu denklik sınıfında aynı olduğundan $L^1(I) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}(I)$ üzerinde iyi tanımlı bir fonksiyondur. Buradan $\mathbb{R}$ üzerindeki aynı özelliklerinden dolayı bu fonksiyonun norm özellikleri sağladığı görülür.

(6) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve (8.26) daki gibi I'ya kısıtlanış olarak tanımlansın. $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olarak tanımlansın. $\mathbb{R}$ de, f_n, f'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serisi ise mutlak yakınsaktır. Burada $\overline{I}$, I'nın sonuç noktasının eklenmesi (varsa) ve sağ uç noktasının çıkartılmasıyla (var ise) elde edilen aralık olmak üzere

$$(8.30) \quad g_n = f_n \chi_{\mathbb{R}} \setminus \overline{I}$$

serisini ele alalım. Burada g_n bir basamak fonksiyonudur (bu niye $\overline{I}$'ya gereksinimiz olduğunu açıklar).Üstelik $\int |g_n| \leq \int |f_n|$ ve dolayısıyla g_n mutlak toplanabilir ve I'nın dışında g'ye yakınsar ve I içindeki her noktada mutlak yakınsaktır (bu durumda f_n'de olduğu gibi). Bu g'nin integrallenebilir olduğunu gösterir ve $\overline{f}$, g'den en az iki noktada farklı olduğundan, integrallenebilir ve dolayısıyla tanım gereği f, I'da integrallenebilirdir.

(7) Öncelikle fonksiyon olduğunu kontrol etmeliyiz. $f \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ olduğundan (8.26) da verilen g kesinlikle $\mathcal{N}(I)$ dadır. "I'ya kısıtlamanın" $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'den $\mathcal{L}^1(I)$'ye bir doğrusal fonksiyon olduğundan (8.27)'yi tanımlar-görüntü sadece f'nin denklik sınıfına bağlıdır. Bu fonksiyonun doğrusal olduğu açık olduğundan örten olduğunu göstermeliyiz. $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise bu I'nı dışında 0 olacak biçimde genişletilebilir ve bu genişletilmiş fonksiyon $\mathcal{L}^1(I)$'nın bir elemanıdır ve bu fonksiyon sınıfının (8.27) altındaki izi $[g]$ dir.

(8) *Problem 3.3* Bir öncekinin devamıdır.

(1) $I = [a, b)$ ve $f \in L^1(I)$ ise her $a \leq x < b$ için f'nin $I_x = [x, b)$'ye kısıtlanışı $L^1(I_x)$ de olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(8.31) \quad F(x) = \int_{I_x} f : [a, b) \to \mathbb{C}$$

nın sürekli olduğunu gösteriniz.

(3) $x^{-1}cos(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun $(0, 1]$ de Lebesgue integrallenebilir olmadığını kanıtlayınız (yukarıda gösterdiğin şeyi düşün).

Çözüm.

(1) Az önceki sorudan elde edilir. $f \in L^1([a, b))$ ve f', f'nin temsili ise f' nın aralığın dışında sıfır olarak genişletilmesiyle elde edilen fonksiyon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın içinde kalır. $L^1(\mathbb{R})$nın elemanı olarak bu f' seçimine bağlı değildir ve

(8.27) $L^1([x,b))$'nın bir elemanı olarak $[x,b)$'ye kısıtlanışı verir ve doğrusal fonksiyonudur.

(2) Bir önceki sorudaki tartışmayı kullanarak, eğer f_n, f' (f'nin temsili) ye yakınsayan mutlak toplanabilir bir seri ise ki-yakınsama mutlak yakınsama ise her $a \leq x \leq b$ için

$$(8.32) \quad f_n' = \chi([a,x))f_n, \quad f_n'' = \chi([x,b))f_n$$

burada $\chi([a,b))$, aralığın karakteristik fonksiyonudur ve bazen $\chi_{[a,b)}$ ile gösterilir. Burada f_n' nın $f\chi([a,b))$ ye ve f_n'' nın $f\chi([a,b))$ ye yakınsadığı görülür, yakınsama mutlak yakınsamadır. Böylece

$$(8.33) \quad \int_{[x,b)} f = \int f\chi([x,b)) = \sum_n \int f_n'', \quad \int_{[a,x)} f = \int f\chi([a,x)) = \sum_n \int f_n'.$$

Şimdi basamak fonksiyonları için $\int f_n = \int f_n' + \int f_n''$ olduğunu biliyoruz, dolayısıyla

$$(8.34) \quad \int_{[a,b)} f = \int_{[a,b)} f' + \int_{[a,b)} f''.$$

Böylece $[a,b)$ da tanımlı her fonksiyon için

$$(8.35) \quad \lim_{x \to a} \int_{[a,x)} f = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu aşağıdaki genel eşitsizliği kullanarak

$$(8.36) \quad \left| \int_{[a,x)} \sum f_n \right| \leq \int_{[a,x)} \left| \sum_{n \leq N} f_n \right| + \int_{[a,x)} \left| \sum_{n \geq N} f_n \right|$$

ve basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir dizinin tanımlanmasıyla görülebilir. N'nin yeterince büyük seçilmesiyle x'den bağımsız olarak son toplam küçük yapılabilir. Diğer taraftan N'yi sabit tutarak $x \to a$ için, basamak fonksiyonların tanımından integral sıfıra gider. Bu (8.36)'yı kanıtlar ve böylece F'nın sürekliliğini kanıtlar.

(3) $(0,1]$ aralığında $x^{-1}cos(\frac{1}{x})$ Lebesgue integrallenebilir olsaydı (aralıkta tanımlıdır), bu fonksiyon sıfırda tanımlanarak, örneğin 0'da 0, alınarak $[0,1)$ aralığında integrallenebilir olurdu. Aynı şey mutlak değeri içinde doğru olurdu ve Riemann integral

$$(8.37) \quad \lim_{\downarrow 0} \int_t^1 x \left| cos(\frac{1}{x}) \right| dx = \infty.$$

Bu limitlerin bir fonksiyonu olarak integrallerin sürekliliği ile çelişr.

Problem 3.4 [Zor ama denenmeli] $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ verilsin.

(1) Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$f_t(x) = f(x-t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{8.38}$$

dönüşümlerinin $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın elemanları olduğunu gösteriniz.

(2)

$$\lim_{t \to 0} \int |f_t - f| = 0 \tag{8.39}$$

olduğunu gösteriniz. Buna "integrallenebilir fonksiyonlar için değer sürekliliği" denir. Y.G: Verilecek!

(3) Her $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ için

$$\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}), t \to [f_t] \tag{8.40}$$

(bu bir "eğridir") fonksiyonun sürekli olduğunu çıkartınız.

Çözüm:

(1) f_n, f'ye yakınsayan-mutlak yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serisi ise $f_n(.-t)$ her $t \in \mathbb{R}$ için $f(.-t)$'ye yakınsar. Böylece her $f(x-t)$ Lebesgue integrallenebilir yani $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$'nın elemanıdır.

(2) f_n, f'ye yukarıda olduğu gibi yakınsayan bir seri ise

$$\int |f| \leq \sum_n \int |f_n| \tag{8.41}$$

olduğunu biliyoruz. Ilk terimleri toplayabiliriz ve tekrar seriye başlayabiliriz ve buradan her n için

$$|f| \leq \int \left| \sum_{n \leq N} \right| + \sum_{n > N} \int |f_n| \tag{8.42}$$

elde edilir. Bunu $f_n(.-t) - f_n(.)$ ye uygulayarak

$$\int |f_t - f| \leq \int \left| \sum_{n \leq N} f_n(.-t) - f_n(.) \right| + \sum_{n > N} \int |f_n(.-t) - f_n(.)| \tag{8.43}$$

bulunur. Burada ikinci toplam $2\sum_{n>N}\int|f_n|$ ile sınırlıdır. Verilen $\delta > 0$ için, mutlak yakınsamadan dolayı, bu toplamı $\frac{\delta}{2}$ ile sınırlı olabilecek yeterince büyük N seçebiliriz. Dolayısıyla problem $|t|$ yeterince küçük ise

$$\int \left| \sum_{n\le N} f_n(.-t) - f_n(.) \right| \le \frac{\delta}{2} \tag{8.44}$$

eşitsizliğini kanıtlamaya indirgenir. Üstelik bu basamak fonksiyonların sonlu toplamıdır. Dolayısıyla her bir bileşke için, yani bir sabit c için, $2|c||t|$ ile sınırlı bir $[a,b)$ aralığındaki karakteristik fonksiyonun c katı için aşağıdakini göstermek yeterlidir. $t \to 0$ için.

$$\left| \int g(.-t) - g(.) \right| \to 0, \tag{8.45}$$

(3) f_t eğrisi için

$$\mathbb{R} \to \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad t \to f_t \tag{8.46}$$

$f_{t+s} = (f_t)_s$ dir ve yukarıdaki tartışmayı her s için

$$\lim_{t\to s} \int |f_t - f_s| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to s} \|[f_t] - [f_s]\|_{L^1} \tag{8.47}$$

ifadesini göstermek için uygulayabiliriz. Bu (8.46) daki fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlar.

Problem 3.5 Son alıştırmalarda bir kompakt aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyonun aralık dışında sıfır değeri alacak biçimde genişletilmesiyle elde edilen fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olduğu gösterilmişti. Bunu ve basamak fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğunu kullanarak $\mathbb{R}$ da tanımlı ve bir kompakt kümenin dışında sıfır olan sürekli fonksiyonların doğrusal uzayının $L^1(\mathbb{R})$ de yoğun olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Basamak fonksiyonların (aslında basamak fonksiyonların denklik sınıfları) $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğundan her basamak fonksiyonun, L^1 e göre, bir kompakt küme dışında sıfır değeri alan sürekli fonksiyonların bir limiti olduğunu göstermek yeterlidir. Dolayısıyla bir $[a,b)$ aralığının karakteristik fonksiyonu için kanıtı vermek yeterlidir ve sonra sabitlerle çarpma ve ekleme yapılabilir. g_n dizisi

$$g_n = n(x-a+\frac{1}{n})\chi_{[a-\frac{1}{n},a]} + n(b+\frac{1}{n}-x)\chi_{[b,a+\frac{1}{n}]} \tag{8.48}$$

olarak tanımlansın. g_n lerin sürekli olduğu açık ve bir kompakt küme dışında sıfırdır.

$$\int |g_n - \chi([a,b))| = \int_{a-\frac{1}{n}}^{1} g_n + \int_{b}^{b+\frac{1}{n}} g_n \leq \frac{1}{n} \tag{8.49}$$

olduğundan $L^1(\mathbb{R}$ de $[g_n] \to [\chi([a,b))$ elde edilir. Bu kompakt dayanaklı sürekli fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ da yoğun olduğunu kanıtlar.

Problem 3.6 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli ve sınırlı ve $f \in \mathbb{R}$ ise $gf \in \mathbb{R}$ ve

$$\int |gf| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g| \int |f| \tag{8.50}$$

olduğunu gösteriniz.

(2) $G \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ bir sürekli fonksiyon $C(K)$ ile bir kompakt metrik uzayı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları gösteriyoruz. Önceki tartışmalarda $L^1([0,1])$ i tanımladık. Birinci kısmı kullanarak $f \in L^1([0,1])$ ise her $x \in [0,1]$ için

$$F(x) = \int_{[0,1]} G(x.)f(.) \in \mathbb{C} \tag{8.51}$$

nın iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

(3) $f \in L^1([0,1])$ ise F'nın $[0,1]$ de sürekli fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(4)

$$L^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad f \to F \tag{8.51}$$

nın sürekli fonksiyonların Banach uzayına, $[0,1]$ deki supremum normuna göre, sınırlı (yani sürekli) doğrusal fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

(1) Öncelikle $[0,1]$ dışında $f = 0$ olduğunu varsayalım. Alıştırmalardaki sonuçlardan birini uygulayarak her R için $[0,1)$ de $g_n \to g$ düzgün yakınsayacak biçimde basamak fonksiyonların bir g_n dizisi vardır. Biralt diziye geçerek $\sup_{[-1,1]} |g_n(x) - g_{n-1}| < 2^{-n}$ olcak biçimde ayarlayabiliriz. f_n, f ye h.h. yakınsayan basamak fonksiyonların bir dizisi ise yukarıda tartışıldığı gibi f_n'i $f_n\chi([-1,1])$ ile değistirebiliriz ve hala aynı sonucu elde ederiz. Böylece g_n lerin düzgün yakınsamasından

$$g_n(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to g(x)f(x) \quad \mathbb{R} \quad \text{de} \quad h.h. \tag{8.53}$$

Dolayısıyla $h_1 = g_1 f_1$, $h_n(x) = g_n(x) \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - g_{n-1}(x) \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)$ olarak tanımlarız. Basamak fonksiyonların bu serisi $gf(x)$ e hemen hemen heryerde

yakınsar ve
(8.54)

$$|h_n| \leq A\,|f_n(x)|+2^{-n}\sum_{k<n}|f_k(x)|\,, \sum_n\int|h_n| \leq A\sum_n\int|f_n|+2\sum_n\int|f_n| < \infty$$

olduğundan mutlak toplanabilirdir.Burada A bir $|g_n|$ için bir sınır ve n den bağımsızdır. $[0,1)$ dışında $f = 0$ varsayımı altında $gf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir ve

$$\int|gf| \leq \sup|g|\int|f| \tag{8.55}$$

elde edilir. Bu tartışmayı $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere f'nin $[p, p+1)$ aralığına kısıtlanışı olan f_p fonksiyonuna uygulayabiliriz. gf, mutlak toplanabilir gf_p serisinin h.h.h limitidir,

$$\sum_p\int|gf_p| \leq \sup|g|\sum_p\int_{[p,p+1)}|f| < \infty \tag{8.56}$$

olduğundan (8.55) sağlanır. Böylece $gf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$\int|gf| \leq \sup|g|\int|f|\,. \tag{8.57}$$

(2) $f \in L^1([0,1])$ ve temsili f' ise $G(x,.)f'(.) \in \mathcal{L}^1([0,1])$ dolayısıyla

$$F(x) = \int_{[0,1]} G(x,.)f(.) \in \mathbb{C} \tag{8.58}$$

iyi tanımlıdır-f' nın seçiminden bağımsız olduğundan , f' bir sıfır fonksiyonuyla değiştirilirse, f bir sıfır fonksiyonuyla değiştirilebilir.

(3) $S = [0,1]\times[0,1]$ kompakt metrik uzayınında tanımlı sürekli bir fonksiyon düzgün sürekli olduğundan verilen $\delta > 0$ için aşağıdaki özellikte bir $\epsilon > 0$ vardır:

$$|x - x'| < \epsilon \Rightarrow \sup_{y\in[0,1]}|G(x,y) - G(x',y)| < \delta. \tag{8.59}$$

Böylece $F \in \mathcal{C}([0,1])$, $[0,1]$ aralığında süreklidir. Üstelik $f \to F$ fonksiyonu doğrusaldır ve

$$\sup_{[0,1]}|F| \leq \sup_S|G|\int_{[0,1]}|f|\,, \tag{8.61}$$

bu

$$I : L^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]), \quad F(f)(x) = \int G(x,.)f(.)$$

doğrusal fonksiyonunun sürekli ya da sınırlı olması için yeterli ve $\|I(f)\|_{sup} \leq \sup |G| \, \|f\|_{L^1}$ dır.