PROBLEMLER 4

Problem 4.1 H bir normlu uzay ve norm aşağıdaki paralelkenar kuralını sağlasın.

$$\|u+v\| + \|u-v\| = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad u, v \in H. \tag{8.7}$$

Bu normun pozitif tanımlı Hermitsel iççarpım'dan geldiğini kanıtlayınız. Büyük fikir:-

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2) \tag{8.8}$$

eşitliğini deneyiniz.

Problem 4.2 H sonsuz boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olsun. Dolayısıyla H'nın her elemani için

$$v = \sum_i c_i v_i \tag{8.9}$$

olacak biçimde (v_i) tabanı vardır. Burada v_i'ler arasında doğrusal bağımlılık ilişki yoktur-(8.9) da $v = 0$ temsili tek bir tanedir. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i = j$ için 1 diğer durumda sıfır) anlamında H'nın bir ortonormal tabanı $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ vardır. Ortonormal taban için (8.9) da geçen katsayıların $c_i = (v, e_i)$ olduğunu kanıtlayınız ve

$$T : H \to \mathcal{C}^n, \quad T(v) = ((v, e_i)) \tag{8.10}$$

nın

$$(u,v) = \sum_i (Tu)_i \overline{(Tv)_i}, \quad \|u\|_H = \|Tu\|_{\mathcal{C}^n}, \quad u, v \in H \tag{8.11}$$

özelliğini sağlayan bir izomorfizma olduğunu kanıtlayınız. Niçin sonlu boyutlu önHilbert uzayı bir Hilbert uzayıdır?