ÇÖZÜMLER 1

Problem 4.1 H bir normlu uzay ve norm aşağıdaki paralelkenar kuralını sağlasın.

$$(10.29)\quad \|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)\quad u,v\in H.$$

Bu normun pozitif tanımlı, Hermitian dan geldiğini kanıtlayınız. Büyük fikilr olarak aşağıdakini deneyiniz:-

$$(10.30)\quad (u,v)=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2)$$

eşitliğini deneyiniz.

Çözüm.$u=v$ alalım.Paralelkenar yasası olmadan da

$$(10.31)\quad (u,v)=\frac{1}{4}||2u||^2+i||(1+i)u||^2-i||(1-i)u||^2=||u||^2$$

vardır. Buradan (u,v) nin Hermitsel olduğunu elde ederiz.Kompleks eşlenik alıp,$||u+iv||=||v-iu||$ gibi norm özelliklerini kullanarak,

$$(10.32)\quad \overline{(u,v)}=\frac{1}{4}(||v+u||^2-||v-u||^2-i||v-iu||^2+i||v+iu||^2)=(v,u)$$

Dolayısı ile bakılıması gereken tek şey, ilk değişkendeki doğrusallıktır.Hemen hesaplara başlayalım. Önce $(u,-v)=-(u,v)$ den [10.32) kullanarak,$(-u,v)=-(u,v)$ buluruz. Buradan

$$(10.33)(2u,v)=\frac{1}{4}(||u+(u+v)||^2-||u+(u-v)||^2+i||u+(u+iv)||^2-i||u+(u-iv)||^2)$$

$$=\frac{1}{2}(||u+v||^2+||u||^2-||u-v||^2-||u||^2+i||(u+iv)||^2+i||u||^2-i||u-iv||^2-i||u||^2)$$

$$-\frac{1}{4}(||u-(u+v)||^2-||u-(u-v)||^2+i||u-(u+iv)||^2-i||u-(u-iv)||^2)=2(u,v)$$

Şimdi bu ve (10.32) den herhangi u,u' ve v için

$$(u+u',v)=\frac{1}{2}(u+u',2v)=\frac{1}{2}\,frac14(||(u+v)+(u'+v)||^2-||(u-v)+(u'-v)||^2+i||(u+iv)-(u-iv)|$$

$$-i||u-iv||^2||^2)+i||(u+iv)-(u-iv)||^2-i||(u-iv))=(u,v)+(u',v).$$

Bulunur. İkinci özdeşlik kullanılarak, birinçide iterasyon yapılırsa, u, v vektörleri ve k tamsayısı için $(ku, v) = k(u, v)$ bulunur. Şimdi n pozitif tamsayısı için $nu' = u$ ve $r = k/n$ alarak

$$(10.35) \quad (ru, v) = (ku', v) = k(u', v) = r(u, v)$$

bulunur ve buradan her kesirli r sayısı için $(ru, v) = r(u, v)$ elde ederiz. Tanımdan, iççarpım her iki değişkende de norma göre süreklidir. Bu nedenle, $r \to x \in \mathbb{R}$, limitine gecebiliriz. Yine tanımdan,direk olarak;

$$(10.36) \quad (iu,v)=\frac{1}{4}(||iu+v||^2-||iu-v||^2+i||iu+iv||^2-i||iu-iv||^2)=i(u,v)$$

eşitliğinden ilk değişkende doğrusallığı elde ederiz.

H sonsuz boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olsun. Dolayısıyla H'nın her elemanının

$$(10.37) \quad v = \sum_i c_i v_i$$

olacak anlamında (v_i) tabanı vardır. Burada v_i'ler arasında doğrusal bah̆llı ilişki yoktur-(8.9) da $v = 0$ temsili tek bir tanedir. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i = j$ için 1 diğer durumda sıfır) anlamında H'nın bir ortonormal tabanı $(e_i)_{i=1}^n$ vardır. Ortonormal taban için (10.37) da geçen katsayıların $c_i = (v, e_i)$ olduğunu kanıtlayınız ve

$$(10.38) \quad T : H \to \mathcal{C}^n, \quad T(v) = ((v, e_i))$$

nın

$$(10.39) \quad (u,v)=\sum_i (Tu)_i\overline{(Tv)_i}, \quad \|u\|_H = \|Tu\|_{\mathcal{C}^n}, \quad u, v \in H$$

özelliğini sağlayan bir izomorfizma olduğunu kanıtlayınız. Niçin sonlu boyutlu önHilbert uzayı bir Hilbert uzayıdır?

Çözüm 2. H'nin sonlu boyutlu bir (ön)Hilbert uzayı olduğu kabul edildiğinden,bir v_i, $i = 1, ..., n$ tabanı vardır. Bu taban n-adımda ortonormal bir tabanla değiştirilebilir. İlk olarak v_1 vektörünü $e_1 = v_1/||v_1||$ ile değiştirelim. Taban vektörlerinin doğrusal bağımsızlığından $||v_1|| \neq 0$ dır. Şimdi de v_2 vektörünü

$$(10.40) \quad e_2 = w_2/||w_2||, w_2 = v_2 - (v_2, e_1)e_1$$

ile değiştirelim.Burada $w_2 \perp e_1$ olduğu iççarpım alarak görülür. v_2, e_1 doğrusal bağımsız olduklarından, $w_2 \neq 0$ vardır. Sonlu tümevarımla $k < n$ için $v_1, ..., v_k$ vektörlerini ortonormal ve v_i ler ile aynı uzayı geren $e_1, ..., e_k$ ile değiştirdiğimizi kabul edelim. v_{k+1} vektörünü aşağıdaki;

$$(10.41) \quad e_{k+1} = w_{k+1}/||w_{k+1}||, w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (v_{k+1}, e_i)e_i$$

ile değiştirelim. İçarpım alarak $w_{k+1} \perp e_i, i = 1, ..., k$ ve v_i ler doğrusal bağımsız olduklarından,$w_{k+1} \neq 0$ elde ederiz. Dolayısıyla, ortonormal kümemizin öğe sayısını aynı özelliklere sahip olacak biçimde bir öğe artırttık. Bu nedenle taban ortonormal hale getirebilir.

Şimdi her $u \in H$ için

$$(10.42) \quad c_i = (u, e_i)$$

olsun. Buradan elde edeceğimiz şey,$U = u - \sum_{i=1}^{n}$ vektörünün her e_i'ye dik olduğudur. Nedeni ise;

$$(10.43) \quad (u, e_j) = (u, e_j) - \sum_i c_i(e_i, e_j) = (u, e_j) - e_j = 0$$

olmasıdır. Buradan $U = 0$ elde edilir.Çünkü $U = \sum_i d_i e_i$ yazıldığında her i için $d_i = (U, e_i) = 0$ bulunur. Şimdi (10.38) deki operatörü düşünelim. Biraz önce kanıtladığımız şey bu dönüşümün bire-bir olduğudur, çünkü $Tu = 0$ tüm $c_i = 0$ ve dolayısıyla $u = 0$ vermektedir. c_i sayıları u vektörüne doğrusal olarak bağlı ve iççarpım ilk değişkende doğrusal olduklarından, T doğrusal bir dönüşümdür. Her $c_i \in \mathbb{C}$ için $u = \sum c_i e_i$ (10.42) nedeniyle c_i sayılarını verdiğinden, T üzerine (örten) bir dönüşümdür. Böylelikle T operatörünün esasında bir izomorfizma olduğunu buluruz.(10.39) daki ilk özdeşlik, aşağıdaki hesaptan elde edilir:

$$(10.44) \quad \sum_{i=1}^{n}(Tu)_i\overline{(Tv)_i} = \sum(u, e_i) = (u, \sum_i (u, e_i)e_i) = (u, v)$$

Burada $u = v$ alarak, $||TU||_{\mathbb{C}} = ||u||_H$ buluruz.

Standart normu ile donandığında $\mathbb{C}^N$ uzayının tam olduğunu biliyoruz. T de bir izomorfizma olduğundan H deki Cauchy dizilerini $\mathbb{C}^N$ uzayındaki Cauchy dizilerine resmeder üstelik T^{-1}, $\mathbb{C}^N$ uzayındaki yakınsak dizileri H deki yakınsak dizilere götürdüğünden H deki her Cauchy dizisi yakınsak ve H tamdır.