Problem 5'nin çözüeri

Problem 5.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın bir elemanı olsun.

$$(12.23) \quad x \in [-L, L] \quad \text{için} \quad f_L(x) = f(x) \quad \text{ve diğer durumda} \quad 0$$

olarak tanımlansın. $f_L \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ve $L \to \infty$ için $\int |f_L - f| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Cözüm: $[-L, L]$'nın karakteristik fonksiyonunu χ_L ile gösterelim. Bu durumda $f_L = f\chi_L$. f_n, h.h. f'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir bir serisi ise, $\int |f_n\chi_L| \leq \int |f_n|$ olduğundan ve $f_n\chi_L$ dizisi f_L ye h.h.y yakınsadığından, $f_n\chi_L$ mutlak toplanabilirdir, dolayısıyla $f_L \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dır. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $L \to \infty$ iken $|f_L(x) - f(x)| \to 0$ ve $|f_L(x) - f(x)| \leq |f_L(x)| + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. Dolayısıyla, Lebesgue (Dominated) yakınsamadan, $\int |f - f_L| \to 0$ elde edilir.

Problem 5.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yerel integrallenebilir, yani, her $L \in \mathbb{N}$ için,

$$(12.14) \quad x \in [-L, L] \quad \text{için} \quad g_L(x) = f(x) \quad \text{ve diğer durumda } 0$$

olarak tanımlanan fonksiyon Lebesgue integrallenebilir, olsun.

(1) Sabit L için

$$g_L(x) \in [-N, N] \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = g_L(x)$$

(12.25)

$$g_L(x) > N \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = N, \quad g_L(x) < N \quad \text{ise} \quad g_L^{(N)}(x) = -N$$

olarak tanımlanan $g_L^{(N)}$ fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(2) $N \to \infty$ için $\int \left| g_L^{(N)} - g_L \right| \to 0$ olduğunu kanıtlayınız.

(3) Aşağıdaki özellikte basamak fonksiyonların bir dizisi vardır:

$$(12.26) \quad h_n(x) \to f(x) \quad h.h. \quad in \quad \mathbb{R}$$

.

(4) $h_{n,L}^{(N)}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \notin [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = 0, \quad h_n(x) \in [-N, N], x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = h_n(x)$$

(12.27)

$x \in [-L, L], h_n(x) > N \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = N, \quad h_n(x) < -N, x \in [-L, L] \quad \text{ise} \quad h_{n,L}^{(N)} = -N.$

$n \to 0$ için $\int \left| h_{n,L}^{(N)} - g_L^{(N)} \right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(1) χ_L, $[-L, L]$'nın karakteristik fonksiyonu olmak üzere tanım gereği $g_L^{(N)} = maks(-N\chi_L, min(N\chi_L, g_L))$ olduğundan, bu fonksiyon $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ içindedir.

(2) Her $x \in \mathbb{R}$ için $g_L^{(N)}(x) \to g_L(x)$ ve $\left| g_L^{(N)} \right| \leq |g_L(x)|$ olduğundan Lebesgue Dominated Yakınsama'dan dolayı, dizi noktasal olarak 0 a yakınsadığından ve üstten $2\,|g(x)|$ ile sınırlı olduğundan, L^1 de $g_L^{(N)} \to g_L$, yani $N \to \infty$ için $\int \left| g_L^N - g_L \right| \to 0$.

(3) $S_{L,n}$ dizisi h.h. g_L fonksiyonuna yakınsayan basamak fonksiyonların bir dizisi olsun. Örneğin g_L'ye yakınsayan basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir serilerin kısmı toplamalar dizisi-integrallenebilme varsayımından dolayı böyle bir dizi vardır. $S_{L,n}$ dizisini $S_{L,n}\chi_L$ ile değiştirerek $[-N, N]$ dışında sıfır olduğunu varsayabiliriz, bu durumda dizi yine g_L'ye h.h. yakınsar. Aşağıda h_n dizisini tanımlayalım:

$$1 \leq k \leq n, x \in [k, -k] \setminus [k-1, -(k-1)] \quad \text{için} \quad h_n(x) = S_{k,n-k}(x)$$

(12.28)

$$x \in \mathbb{R} \setminus [-n.n] \quad \text{için} \quad h_n(x) = 0$$

olarak tanımlansın. Her n için h_n basamak fonksiyonların bir toplamı olduğundan bu dizi kesinlikle basamak fonksiyonların bir dizisidir- ve yeterince büyük L için $[L, -L] \setminus [-(L-1), (L-1)]$ de $S_{L,n-L} \to g_L$. Buradan da, ölçümleri sıfır olan sayılabilir kümelerin birleşimleri dışında $h_n(x) \to f(x)$ olduğu ve böylece yakınsamanın h.h. yakınsama olduğu görülür.

(4) Bu ilk problemin tekrarıdır, $h_{n,L}^{(N)} \to g_L^{(N)}$ hemen heryerde ve $\left| h_{n,L}^{(N)} \right| \leq N\chi_L$, dolayısıyla $g_L^{(N)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $n \to \infty$ için $\int \left| h_{n,L}^{(N)} - g_L^{(n)} \right| \to 0$.

Problem 5.3 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$'nın bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz-bu konunun özü olduğu için detayların dikkatlice yapılması yararlı olur.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ kümesinin elemanları $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yerel integrallenebilir ve $|f|^2$ integrallenebilir olan fonksiyonlar olarak tanımlayalım.

(1) f fonksiyonu için h_n seçelim ve g_L, $g_L^{(N)}$ ve $h_n^{(N)}$ yi (12.24), (12.25) ve (12.27) deki gibi tanımlayalım.

(2) Sabit n ve L için $h_{n,L}^{(N)}$'yi kullanarak $g_L^{(N)}$ ve $(g_L^{(N)})^2$ fonksiyonlarının $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ da olduğunu ve $N \to \infty$ için $\int \left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(3) $(g_L^{(N)})^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $N \to \infty$ için $\int \left|(g_L^{(N)})^2 - (g_L)^2\right| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(4) $L \to \infty$ için $\int |(g_L)^2 - f^2| \to 0$ olduğunu gösteriniz.

(5) $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ise $fg \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ve

$$\left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}, \quad \|g\|_{L^2}^2 = \int |f|^2 \tag{12.29}$$

olduğunu gösteriniz.

(6) Bu sonuçları kullanarak $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nın bir doğrusal uzay olduğunu gösteriniz.

(7) $\mathcal{N}$ sıfırımsı fonksiyonlar olmak üzere $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$ bölüm uzayının bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

(8) Tartışmaları kompleks değerli fonksiyonlar için genişletiniz.

Çözüm:
(1) Yapıldı. Sanırım $h_{n,L}^{(N)}$ olmalı.

(2) $g_L^{(N)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğu kontrol edildi. Aynı fikir $g_L^{(N)}$'ye uygulanır, yani $(h_{n,L}^{(N)})^2 \to g_L^{(N)}$ hemen heryerde ve herikisi de $N^2\chi_L$ ile sınırlı dolayısıyla yakınsama

$$(h_{n,L}^{(N)})^2 \to (g_L^{(N)})^2 \leq N^2\chi_L h.h.y \Rightarrow (g_L^{(N)})^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \quad \text{ve}$$

$$\left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0 \quad h.h.y \tag{12.30}$$

$$\left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \leq N^2\chi_L \Rightarrow \int \left|(h_{n,L}^{(N)})^2 - (g_L^{(N)})^2\right| \to 0$$

verir.

(3) $N \to \infty$ için $(g_L^{(N)})^2 \to (g_L)^2$ h.h. ve $(g_L^{(N)})^2 \to (g_L)^2 \leq f^2$ dolayısıyla dominated yakınsama ile $(g_L)^2 \in \mathcal{L}^1$ ve $N \to \infty$ için $\int \left|(g_L^{(N)} - (g_L)^2\right| \to 0$.

(4) Sınırlı yakınsamanın aynı fikri, $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sınırı kullanılarak, $g_L^2 \to f^2$ olduğunu gösterir.

(5) Bütün bunlar $f, F = G \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ için $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ içindir. Yukarıda olduğu gibi f için $h_{n,L}^{(N)}$ ve g için $H_{n,L}^{(N)}$ basamak fonksiyonlar dizileri ile yaklaşılmıştır.

Bu durumda $\mathcal{L}^1$ de ąrpım dizisi-basamak fonksiyonların bir dizisi- hemen heryerde

$$(12.31)\quad h_{n,L}^{(N)}(x)H_{n,L}^{(N)}(x)\to g_L^{(N)}(x)G_L^{(N)}(x)$$

ve $N^2\chi_L$ ile mutlak sınırlıdır. Yakınsamadan dolayı $g_L^{(N)}G_L^{(N)}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. $N\to\infty$ için bu dizi $g_L(x)G_L(x)$'ye hemen heryerde yakınsaktır ve aşağıdaki sınırlama vardır:

$$(12.32)\quad |g_L(x)G_L(x)|\le|f(x)F(x)|\,\frac{1}{2}(f^2+F^2)$$

ve yakınsamadan limit $g_LG_L\in\mathcal{L}^1$ dir. Son olarak $L\to\infty$ için aynı fikir $fF\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir. Üstelik $|fF|\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$(12.33)\quad \left|\int fF\right|\le\int|fF|\le\|f\|_{L^2}\|F\|_{L^2},$$

burada geçen son eşitsizlik Cauchy eşitsizliğinden elde edilir-arzu edilirse önce ilk yaklaşım dizisi için ve sonra limitin alımasıyla elde edilir.
(6) Dolayısıyla $f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ gerçel değerli ise $f+g$ yerel integrallenebilirdir ve yukarıdaki tartışmadan

$$(12.34)\quad (f+g)^2=f^2+2fg+g^2\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Sabit c ve $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ için $cf\ \in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

(7) Yukarıdaki $\mathcal{L}^1$ için verilen fikir L^1 için de aynıdır. Yani, $\int f^2=0$ ise hemen hemen heryerde $f^2=0$ ve bu $f=0$ h.h.y olmasına denktir. Bu durumda, h lar sıfırımsı fonksiyonlar olmak üzere, fh ve h^2 fonksiyonları sıfırımsı ve $(f+h)^2=f^2+2fg+g^2$ olduğundan, $f+h$ fonksiyonların normları f'nin normu ile aynıdır. Aynı şey iç çarpım için doğrudur ve buradan sıfırımsı fonksiyonlara bölünmesiyle elde edilen bölüm uzayının

$$(12.35)\quad L^2(\mathbb{R})=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{N}$$

bir önHilbert uzayı olduğu elde edilir.

Geriye tamlığı göstermek kalıyor. ($[f_n]$ dizisi $L^2(\mathbb{R})$ de $\sum_n\|f_n\|_{L^2}<\infty$ anlamında mutlak toplanabilir seri olduğunu varsayalım. Bu durumda kesme serisi $f_n\chi_L$, L^1 de Cauchy eşitsizliğinden dolayı

$$(12.36)\quad \int|f_n\chi_L|\le L^{\frac{1}{2}}(\int f_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

anlamında mutlak toplanabilirdir. Buradan $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ alınırsa her L için $F_n(x)\chi_L$ dizisi hemen hemen heryerde yakınsaktır dolayısıyla

$$(12.37) \quad F_n(x) \to f(x) \quad \text{hemen heryerde.}$$

L^1'nın tamlığından dolayı yerel integrallenebilir olan f fonksiyonunun $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aşağıdaki seriyi ele alalım.

$$(12.38) \quad g_1 = F_1^2, \quad g_n = F_n^2 - F_{n-1}^2.$$

Bu elemanlar $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dedir ve $n > 1$ için Cauchy eşitsizliğinden
(12.39)

$$\int |g_n| = \int \left|F_n^2 - F_{n-1}^2\right| \leq \|F_n - F_{n-1}\|_{L^2}\|F_n + F_{n-1}\|_{L^2} \leq \|f_n\|_{L^2} 2\sum_k \|f_k\|_{L^2},$$

burada üçgen eşitsizliği kullanıldı. Bu aslında g_n serisinin $\mathcal{L}^1$ de mutlak toplanabilir olduğunu gösterir ve

$$(12.40) \quad \sum_n \int |g_n| \leq 2(\sum_n \|f_n\|_{L^2})^2.$$

Gerçekte kısmı toplamlar dizisi F_n^2, $f^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ye yakınsar. Bu $f \in \mathcal{L}^2$ olduğunu gösterir, üstelik

$$(12.41) \quad n \to 0 \quad \text{için} \quad \int (F_n - f)^2 = \int F_n^2 + \int f^2 - 2\int F_n f \to 0.$$

Gerçekten ilk terim $\int f^2$ ye yakınsar ve, Cauchy eşitsizliğinden, çarpımların serisi $f_n f$, L^1 de mutlak toplanabilir ve limiti f^2 dır dolayısıyla üçüncü terim $-2\int f^2$ ye yakınsar. Bu $L^2(\mathbb{R})$ de $[F_n] \to [f]$ olduğunu gösterir ve böylece tamlığı göstermiş oluruz.

(8) Kompleks durum için doğrusallığı kontrol etmeliyiz. f yerel integrallenebilir ve $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olsun. f'nın gerçel kısmı yerel integralenebilir ve yukarıda tartışmadan $F_L^{(N)}$ yaklaşımı $(F_L^{(N)})^2 \leq |f|^2$ eşitsizliğini sağlayan kare integrallenebilirdir ve dominated yakınsamadan önce $N \to \infty$ ve sonra $L \to \infty$ alınarak gerçel kısmın $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de olduğu görülür. Şimdi doğrusallık ve tamlık gerçel durumdan görülür.

Problem 5.4

Aşağıdaki diziyi ele alalım.

$$(12.42) \quad h^{2,1} = \{c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_j (1+j^2)|c_j|^2 < \infty\}.$$

(1) Aşağıda tanımlanan

$$(12.43) \quad h^{2,1} \times h^{2,1} \to \mathbb{C}, \quad (c,d) \to < c,d >= \sum_j (1+j^2) c_j \overline{d_j}$$

fonksiyonun ve bir iç Hermitian olduğunu gösteriniz ve böylece $h^{2,1}$ bir Hilbert uzayıdır.

(2) Bu uzaydaki norm $\|.\|_{2,1}$ ile gösterilsin ve l^2 deki norm $\|.\|_2$ olmak üzere

$$(12.44) \quad h^{2,1} \subset l^2, \quad \|c\|_2 \leq \|c\|_{2,1} \quad \forall c \in h^{2,1}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
Aşağıdaki Cauchy eşitsizliğinden

$$< c,d >= \sum_j (1+j^2)^{\frac{1}{2}} c_j \overline{(1+j^2)^{\frac{1}{2}}) d_j}$$

(12.45)

$$\sum_j \left| (1+j^2)^{\frac{1}{2}} c_j \overline{(1+j^2)^{\frac{1}{2}}) d_j} \right| \leq (\sum_j (1+j^2)|c_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_j (1+j^2)|d_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

dolayı tanımlanan seri mutlak yakınsak olduğundan iç çarpım iyi tanımlıdır.

Bu,

$$(12.46) \quad \|c\|_{2,1} = (\sum_j (1+j^2)|c_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesi sadece bütün c_j lerin sıfır olması durumunda sıfır olduğundan, sesquilinear ve pozitif tanımlıdır. Tamlık l^2 için olduğu gibi elde edilir-$c^{(n)}$ bir Cauchy dizisi ise $(1+j)^{\frac{1}{2}}$ Cauchy olduğundan, her komponent $c_j^{(n)}$ yakınsaktır. c_j limitleri, dizi sınırlı ve A normların bir sınırı olmak üzere,

$$(12.47) \quad \sum_{j=1}^{N} (1+j^2)^{\frac{1}{2}} |c_j|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} (1+j^2)^{\frac{1}{2}} \left|c_j^n\right|^2 \leq A$$

olduğundan, $h^{2,1}$ nın elemanlarıdır. $\left\|c^{(n)} - c^{(m)}\right\| \leq \epsilon$ üzerinden $m \to \infty$ için $h^{2,1}$ de Cauchy koşulundan $c^{(n)} \to c$ elde edilir.

(2) Her sonlu N için

$$(12.48) \quad \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \sum_{j=1}^{N} (1+j)^2 |c_j|^2 \leq \|c\|_{2,1}^2$$

olduğundan $h^{2,2} \subset l^2$ olduğu açıktır ve $N \to \infty$ için

$$(12.49) \quad \|c\|_{l^2} \leq \|c\|_{2,1}.$$

Problem 5.5 Ayrılabilir durum için Riesz Temsil Teoremi'mini doğrudan kanıtlayınız. Ayrılabilir Hilbert uzayından bir (e_i) ortonormal tabanı seçilsin. $T : H \to \mathbb{C}$ sınırlı bir doğrusal fonksiyonel olsun. Aşağıdaki diziyi tanımlayalım.

$$(12.50) \quad w_i = \overline{T(e_i)}, \quad i \in \mathbb{N}$$

(1) Bazı sabit C ler için $|Tu| \leq C\|u\|_H$ olduğunu hatırlayalım. Her sonlu N için

$$(12.51) \quad \sum_{j=1}^{N} |e_i|^2 \leq C^2.$$

(2) $(e_i) \in l^2$ ve

$$(12.52) \quad w = \sum_i w_i e_i \in H$$

olduğuna karar veriniz.

(3) Aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu gösteriniz.

$$(12.53) \quad T(u) = < u, w >_H \quad \forall u \in H \quad \text{ve} \quad \|T\| = \|w\|_H.$$

Çözüm:

(1) Sonlu toplam $w_N = \sum_{i=1}^{N} w_i e_i$ Hilbert uzayının bir elemanıdır ve normu Bessel özdeşliğinden dolayı $\|w_N\|_N^2 = \sum_{i=1}^{N} |w_i|^2$. Bunu genişleterek

$$(12.54) \quad T(w_N) = T(\sum_{i=1}^{N} w_i e_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{N} |w_i|^2$$

ve T'nın sürekliliğinden

$$|T(w_N)| \leq C\|w_N\|_H \Rightarrow \|w_N\|_H^2 \leq C\|w_N\|_H \Rightarrow \|w_N\|_H^2 \leq C^2, \tag{12.55}$$

elde edilir, istenilen de budur.

(2) $N \to \infty$ alınmasıyla sonsuz toplamın yakınsak olduğu ve $\|w_N - w\| \leq \sum_{j>N} |w_i^2|$ sıfıra gittiğinden

$$\sum_i |w_i|^2 \leq C^2 \Rightarrow w = \sum_i w_i e_i \in H$$

dır.

(3) Her $u \in H$ için, (e_i) lerin tamlığından dolayı $u_N = \sum_{i=1}^N < u, e_i > e_i$, dolayısıyla T'nin sürekliliğinden

$$T(u) = \lim_{N\to\infty} T(u_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N < u, e_i > T(e_i)$$

(12.57)

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N < u, w_i e_i >= \lim_{N\to\infty} < u, w_N >=< u, w >$$

elde edilir, burada iç çarpımın sürekliliği kullanıldı. Buradan ve Cauchy eşitsizliğinden $\|T\| = \sup_{\|u\|_H=1} |T(u)| \leq \|w\|$ elde edilir. Tersi ise $T(w) = \|w\|_H^2$ eşitsizliğinden çıkar.