

PROBLEMLER 6

Önereceğim yardımcı görüşlere yararlı olmayabilir, o açıdan bu görüşlere fazla odaklanmamalı.

Problem 6.1 H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bir $K \subset H$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul sınırlı, kapalı ve K da zayıf yakınsayan her dizinin yakınsak (kuvvetli) olması olduğunu gösteriniz.

Y.G: Bir yön için sınırlı her dizinin zayıf yakınsayan bir alt dizisinin olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2 Ayrılabilir bir Hilbert uzayında zayıf yakınsayan bir (v_n) dizisinin (kuvvetli) yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun zayıf limit v 'nin

$$(12.19) \quad \|v\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_H$$

koşulunu sağlaması olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki eşitliği göstermek yeterlidir.

$$(12.20) \quad (v_n - v, v_n - v) = \|v_n\|^2 - 2Re(v_n, v) + \|v\|^2.$$

Problem 6.3 Bir Hilbert uzayı H nin altkümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşulun kapalı, sınırlı ve 'sonlu boyutlu yaklaşım' özelliğinin olması, yani, her $\epsilon >$ için

$$(12.21) \quad d(K, D_N) = \sup_{u \in K} \inf_{v \in D_N} \{d(u, v)\} \leq \epsilon$$

olacak biçimde sonlu boyutlu bir $D_N \subset H$ doğrusal alyuzayın olması, gerektiğini gösteriniz.

Gerekliliği göstermek için her ortonormal tabana göre bir kompakt kümenin 'eş-küçük kuyruk' özelliğini kullanınız. Sonlu boyutlu yaklaşım koşulunu kullanmak için K da zayıf yakınsayan dizinin (kuvvetli) yakındadığını kullanınız, konvekslik sonucunu kullanarak D_N 'nin v_n 'ye olan en yakın noktası v'_n olmak üzere D_N de (v'_n) dizisini tanımlayınız. v'_n nin zayıf ve böylece kuvvetli yakınsak olduğunu gösteriniz ve buradan da (v_n) dizisinin Cauchy olduğunu görünüz.

Problem 6.4 $A : H \rightarrow H$ sınırlı ve $A(H) \subset$ sonlu boyutlu olsun. (v_n) zayıf yakınsak is (Av_n) dizisinin H da kuvvetli yakınsadığını gösteriniz.

Problem 6.5 H_1 ve H_2 iki farklı Hilbert uzayı ve $A : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı bir doğrusal operatör olsun.

$$(12.22) \quad (Au_1, u_2)_{H_2} = (u_1, A^*u_2)_{H_1} \quad \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2$$

olacak biçimde tek bir tane (eşlenik) $A^* : H_2 \rightarrow H_1$ sınırlı doğrusal operatörün olduğunu gösteriniz.