

Problemler 6'nın Çözümleri

Önereceğim yardımcı görüşler yararlı olmatadır, o açıdan bu görüşlere fazla odaklanmamalı.

Problem 6.1 H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bir $K \subset H$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul sınırlı, kapalı ve K da zayıf yakınsayan her dizinin yakınsak (kuvvetli) olması olduğunu gösteriniz.

Bir yön için sınırlı her dizinin zayıf yakınsayan bir altdizisinin olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2 Ayrılabilir bir Hilbert uzayında zayıf yakınsayan bir (v_n) dizisinin (kuvvetli) yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun zayıf limit v 'nin

$$(14.28) \quad \|v\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_H$$

koşulunu sağlaması olduğunu gösteriniz.

İpuçu: Aşağıdaki eşitliği göstermek yeterlidir.

$$(14.29) \quad (v_n - v, v_n - v) = \|v_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(v_n, v) + \|v\|^2.$$

Problem 6.3 Bir Hilbert uzayı H nın altkümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşulun kapalı, sınırlı ve 'sonlu boyutlu yaklaşım' özelliğinin olması, yani, her $\epsilon >$ için

$$(14.30) \quad d(K, D_N) = \sup_{u \in K} \inf_{v \in D_N} \{d(u, v)\} \leq \epsilon$$

olacak biçimde sonlu boyutlu bir $D_N \subset H$ doğrusal aliyuzayın olması, gerektiğini gösteriniz.

İpuçu: Gerekliliği göstermek için her ortonormal tabana göre bir kompakt kümenin 'eş-küçük kuyruk' özelliğini kullanınız. Sonlu boyutlu yaklaşım koşulunu kullanmak için K da zayıf yakınsayan dizinin (kuvvetli) yakınsadığını kullanınız, konvekslik sonucunu kullanarak D_N 'nin v_n 'ye olan en yakın noktası v'_n olmak üzere D_N ' de (v'_n) dizisini tanımlayınız. v'_n nin zayıf ve böylece kuvvetli yakınsak olduğunu gösteriniz ve buradan da (v_n) dizisinin Cauchy olduğu görülür.

Problem 6.4 $A : H \rightarrow H$ sınırlı ve $A(H) \subset$ sonlu boyutlu olsun. (v_n) zayıf yakınsak is (Av_n) dizisinin H da kuvvetli yakınsadığını gösteriniz.

Problem 6.5 H_1 ve H_2 iki farklı Hilbert uzayı ve $A : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı bir doğrusal operatör olsun.

$$(14.31) \quad (Au_1, u_2)_{H_2} = (u_1, A^*u_2)_{H_1} \quad \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2$$

olacak biçimde tek bir tane (adjoint) $A^* : H_2 \rightarrow H_1$ sınırlı doğrusal operatörün olduğunu gösteriniz.