PROBLEMLER 7

Problem 7.1 Fourier tabanı $exp(ikx)/\sqrt{2\pi}$ nın tam olduğu hesap ile gösterilebil mi? Belki. Aşağıdaki sorular sizi yönlendirmek içindir. Sabit bir $t \in (0, 2\pi)$ değeri için

(1)

$$(14.25) \quad 0 \leq x < t \quad \text{için} \quad f_t(x) = 1, \quad \text{ve} \quad t \leq x \leq 2\pi \quad \text{için} \quad f_t(x) = 0$$

basamak fonksiyonlarının $c_k(t) = \int_{(0,2\pi)} f_t e^{-ikx}$ Fourier katsayılarını bulunuz.

(2) Fourier serisinin $L^2(0, 2\pi)$ uzayında f_t fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşulun

$$(14.26) \quad 2\sum_{k>0} |c_k(t)|^2 = 2\pi t - t^2, t \in (0, 2\pi)$$

olduğunu gösteriniz.

(3) Bu koşulu Fourier serisi türünden yazınız ve Fourier serisinin tamlığının terimleri k^{-2} ve k^{-4} lerden oluşan toplamlar türünden ifade edilebileceğini gösteriniz.

(4) Ters yönde giderek, yukarıdaki iki serinin toplamlarını kullanarak, Fourier bazının tamlığını nasıl elde edebileceğimizi açıklıyabilir misiniz?Burada gerçekten çok ince bir nokta var, bakalım bu ince hususu görebilecek misiniz?

Problem 7.2 Seçilecek uygun d_k sabitleri için $d_k sin(kx/2), k \in \mathbb{N}$ fonksiyonlarının $L^2(-2\pi, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduğunu gösteriniz.

(İpuçu :) Yapılacak iş $d'_k exp(ikx/2), k \in \mathbb{Z}$ fonksiyonlarının $L^2(o, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduklarını göstermek ve sonra bu fonksiyonları tek fonksiyon olarak $(0, 2\pi)$ aralığından $(-2\pi, 2\pi)$ aralığına genişletmektir.

Problem 7.3 (e_k) dizisi ayrık H Hilbert uzayında ortonormal bir taban olsun. $S : H \to H$ ve

$$(14.27) \quad Se_j = e_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$$

sağlayan biriçik sınırlı doğrusal dönüşüm olduğunu gösteriniz. Eğer $B : H \to H$ sınırlı ve doğrusal bir dönüşüm ise $S + \epsilon B$ dönüşümünün bir ϵ_0 için ϵ'nun, $\epsilon < \epsilon_0$ değeri için tersinir olmadığını gösteriniz.

(İpuçu :)$Lu = (Bu, e_1)$ ile tanımlanan doğrusal fonksiyonel $L : H \to \mathbb{C}$ düşünelim. $B'u = Bu - (Lu)e_1 : H \to H_1 = \{u \in H; (u, e_1) = 0\}$ doğrusal bir dönüşümdür. Kimi küçük ϵ'lar için $S + \epsilon B$ dönüşümünün tersinir olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak $S + \epsilon B$ dönüşümünün H uzayından kendisine bir izomorfizma olamıyacağını gösteriniz. Bunu yaparken ya e_1 vektörünün iz uzayında olmadığını veya çekirdek uzayında sıfırdan farklı bir vektör olduğunu gösterebilirsiniz.

Soru 7.4 Bir Hilbert uzayında sınırlı dönüşümlerin çarpımların noktasal yakınsama topolojisinde sürekli olduğunu gösteriniz. Başka bir deyişle eğer A_n ve B_n noktasal olarak A ve B dönüşümlerine yakınsıyorlarsa , yani $A_n x \to Ax$,$B_n x \to Bx$ ise $A_n B_n$ dönüşümleri AB dönüşümüne noktasal yakınsar.