Problem 8.1 Sürekli bir fonksiyon $K : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$'nın her $x \in [0,1]$ için $K(x) \in L^2(0,2\pi)$ nın Fourier serisinin düzgün yakınsadığını gösteriniz, yani: $K_n(x)$, $|k| \leq n$ üzerinde Fourier serisinin sonlu toplamı ise $K_n : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$ süreklidir ve

$$(18.8) \qquad \sup_{x \in [0,1]} \|K(x) - K_n(x)\|_{L^2(0,2\pi)}.$$

İpuçu: Daha önce kanıtı verilen bir Hilbert uzayında kompaktlık özelliğini kullanınız.

Çekirdeği $K \in C([0,1]^2)$ olan $L^2(0,1)$ de tanımlı integral operatörünü ele alalım, yani

$$(18.9) \quad T(u)(x) = \int_{(0,1)} K(x,y)u(y).$$

T'nın L^2 de sürekli olduğunu ve sonlu izi operatörlerin norm kapanışında olduğunu gösteriniz. İpuçu: Önceki problemi kullanınız. Bu şekilde tanımlanan sürekli fonksiyon K için, $x \in [0,1] \to K(x,.) \in C([0,1])$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ve böylece $K : [0,1] \to L^2(0,1)$ sürekli, dolayısıyla az önceki problem aralık yeniden ayarlanarak uygulanır.

Daha detaylı bir yardımcı görüş: $K(x,y)$ yi $L^2(0,1)$ de değer alan x değişkenli ve $L^2(0,1)$ de değer alan fonksiyon olarak ele alabiliriz. $K_n(x,y)$ önceki problemde verilen değişkenleri x, y olan fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun $L^1(0,1)$ de sonlu izi sürekli fonksiyonlardır bu iyi durum, çünkü kare integrallenebilir. Burada fikir n büyüdükçe sınırlı fark operatörün $K - K_n$ sıfıra gitmesidir. Bunu göstermek açıklayıcı olabilir. Diğer durum için x ve y lerin rolleri değiştirilir.

Problem 8.3 Bir değişkenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara odaklanmasına karçın, bazı noktalarda, örtme teoremi 2 boyut için kanıtlandı. $L^2((0,2\pi)^2)$ nin bir Hilbert uzayı olduğunu gösterdiğinizi ve bildiğinizi varsayalımkanıtın çercevesi $\frac{exp(ikx+iyl)}{2\pi}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$ fonksiyonlarının tam ortonormal taban olduğunun gösterilmesidir.