PROBLEMLER 9

Aşağda bazı düzeltmeler var.

(1) P9.2(2) ve diğer yerlerde $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ yerine $C^0(\mathcal{S})$, daire içerisinde tanımlı, supremum normuna göre, sürekli fonksiyonların uzayları.

(2) (19.4) da $u = Fv$ olacak, $u = Sv$ değil.

(3) (19.41) den önce $u = Fv$ olacak.

(4) (19.43) deki tartışma detaylandırılmalı.

(5) P10.2"'nın son kısmı detaylandırılmalı.

Bu hafta, periodik fonksiyonlar üzerinde,

$$(19.28) \quad Qu = (-\frac{d^2}{dx^2} + V(x))u(x)$$

eşitliğini sağlayan operatörlerin tersinirliğini çalışmak yararlı olur. Buna yaklaşmak için integral operatörlerine ihtiyaç var.

Problemlere başlamadan önce periodik fonksiyonlara gözatmaya ihtiyacımız var.

Problem 9.1 Periyodik Fonksiyonlar $\mathbb{S}$ kompleks sayılarda bir yarıçaplı, 0 merkezli çember olsun, yani $\mathcal{S} = \{z : |z| = 1\}$.

(1) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(12.29) \quad \mathcal{C}(\mathbb{S}) = \{u : u : \mathbb{S} \to \mathbb{C}\} \to \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u(x+2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(19.30) \quad L^2(0, 2\pi) \longleftrightarrow \{u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}), u_{(0,2\pi)} \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

$$\text{ve} \quad u(x + 2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \setminus \mathcal{N}_P,$$

burada $\mathcal{N}_P$, her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x + 2\pi) = u(x)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonların sıfırımsı uzayını göstermektedir.

(3) $L^2(\mathbb{S})$, (19.30) nın sol tarafındaki uzayı gösteriyorsa bir

$$(19.31) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) \to L^2(\mathbb{S})$$

yoğun dönüşümün olduğunu gösteriniz. Buradaki fikir $\mathbb{S}$ üzerindeki fonksiyonlar $\mathbb{R}$ de 2π-periodik fonksiyonlar olarak düşünülebileceği hakkındadır.

P9.2: Schrödinger's operator. Aşağıdaki örneği ele alalım.

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+V(x)u(x)=f(x)\quad x\in\mathbb{R}, \tag{19.32}$$

(1) önce $V = 1$ alalım. Neden $V = 0$ almıyoruz? Sona kadar bunu yanıtlamaya çalışmayın?

(2) $f(x)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ gerçel sayılarda 2π-periodik fonksiyonlar olmak üzere

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)=f(x)\quad x\in\mathbb{R}, \tag{19.33}$$

denkleminin çözümünü hatırlayın. $\mathbb{R}$ de (19.33) i sağlayan iki kez türevlenebilen ve ikinci türevi s¨urekli olan 2π-periodlu tek bir tane u fonksiyonunun olduğunu kanıtlayınız ve bu çözüm

$$u(x)=(Sf)(x)=\int_{(0,2\pi)}A(x,y)f(y) \tag{19.34}$$

olarak yazılabilir, burada $A(x,y)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ ve her $x,y\in\mathbb{R}$ için $A(x+2\pi,y+2\pi)=A(x,y)$ sağlanır.

İpuçu: Önce periodik kısmını yok varsayarak çözüm bulunuz. Bunu yapmak için, içerilen denklemin diferansiyel operatörü faktörize edilebilir. karşılıklı terimler yok olacağından,

$$v=\frac{du}{dx}-v\quad\text{ise}\quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2}+u(x)=-\frac{dv(x)}{dx}+v \tag{19.35}$$

denklemine bakalım. Integrating faktörleri görmek için aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\begin{gathered}\frac{du}{dx}-u=e^x\frac{d\Phi}{dx},\Phi=e^{-x}u\\ \frac{dv}{dx}+v=e^{-x}\frac{d\psi}{dx},\Phi=e^{-x}u.\end{gathered} \tag{19.36}$$

Iki kez integral alarak denklemi ọözünüz ve böylece (19.33) deki deiferensiyel denklemin bir çözümünü bulunuz. Bunu iki katlı integral biçiminde açıkca yazınız ve integrallerin yerini değiştirerek çözümü, A', $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ sürekli olmak üzere

$$u'(x)=\int_{(0,2)\pi}A'(x,y)f(y)dy \tag{19.37}$$

biçiminde yazınız. $u'(2\pi) - u'(0)$ ve $\frac{du'}{dx}(2\pi) - \frac{du'}{dx}(0)$ farklarını f'yi içeren integraller formunda hesaplayınız. Ve u' yi homojen denklemin çözümü olarak ekleyiniz, $f = 0$ için $c_1e^x + c_2e^{-x}$ dir, dolayısıyla (19.33) nın yeni çözümü $u(2\pi) = u(0)$ ve $\frac{du}{dx}(2\pi) = \frac{du}{dx}(0)$ ifadelerini sağlar. Şimdi u'nın (19.34) formunda olduğu gibi verildiğini kontrol ediniz.

(3) Doğrudan ya da dolaylı olarak $A(x, y) = A(y, x)$ ve A'nın gerçel olduğunu gösteriniz.

(4) S operatörünün $L^2(\mathbb{S})$ de sınırlı bir opertöre genişletilebileceği görünüz.

(5) Aşağıdaki ifadeyi doğrulayınız.

$$(19.38) \quad S(e^{ikx}) = (k^2 + 1)^{-1}e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(6) Az önceki sonucu kullanarak ya da bir başka şekilde S'nin $L^2(\mathbb{S})$ de eşlenik kompakt operatör olduğunu gösteriniz.

(7) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ ise Sg'nin iki kez sürekli olarak türevlenebilir olduğunu gösteriniz. Yardımcı Görüş:integralin deferansiyelini alarak işlem yapınız.

(8) F, $L^2(\mathbb{S})$ de tanımlı, özdeğerleri $(k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ olan eşlenik kompakt olmak üzere $S = F^2$ olduğunu gösteriniz.

(9) $F : L^2(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ olduğunu gösteriniz.

(10) (19.32) deki reel eşitliğe gidelim ve V'nin sürekli, gerçel değerli ve 2π periodik olduğunu varsayalım. u iki kez türevlenebilir, 2π periodik ve verilen bir $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ için (19.32) sağlanıyorsa,

$$(19.39) \quad u + S((V - 1)u) = Sf \quad \text{ve böylece} \quad u = -F^2((V - 1)u) + F^2f$$

olduğunu gösteriniz ve

$$(19.40) \quad v \in L^2(\mathbb{S}) \quad \text{ve} \quad v + (F(V - 1)F)v = Ff \quad \text{olmak üzere} \quad u = Fv$$

olduğu sonucuna varınız, burada $V - 1$, $V - 1$ ile çarpılmasıyla elde edilen operatördür.

(11) Tersine, $v \in L^2(\mathbb{S})$

$$(19.41) \quad v + (F(V - 1)F)V = fF, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$$

ifadesini sağlıyorsa $u = Fv$, 2π periodik, $\mathbb{R}$ de iki kez türevlenebilen bir fonksiyondur ve (19.32) yi sağlar.

(12) Spektral teoremi $F(V - 1)F$'e uygulayınız ve her $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ için

$$(19.42) \quad \lambda v + (F(V - 1)F)v = g, \quad g \in L^2(\mathbb{S})$$

nin her $g \in L^2(\mathbb{S}$ için tek çözümünüm olması için gerekli ve yeterli koşulun her j için $\lambda \neq \lambda_j$ olacak biçimde $|\lambda_j| \to 0$ ifadesini sağlayan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de bir λ_j dizisinin olduğunu gösteriniz.

(13) Her λ_j için

$$(19.43) \quad \lambda_j v + (F(V-1)F)V = 0, \quad v \in L^2(\mathbb{S})$$

denkleminin çözümünün $\mathbb{R}$ de sürekli 2π periodik olduğunu gösteriniz.

(14) (19.43) de v'yi sağlayan fonksiyona karşılık gelen $u = Fv$ fonksiyonunun ikinci türevi sürekli, $\mathbb{R}$ de 2π periodik ve

$$(19.44) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s_j + s_j V(x))u(x) = 0, \quad s_j = \frac{1}{\lambda_j}$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

(15) Tersine, u sıfıra eşit olmayan ikinci türevi var ve sürekli, 2π periodik fonksiyon,

$$(19.45) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s + sV(x))u(x) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

ise bazı j ler için $s = s_j$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler 9

Periyodik Fonksiyonlar $\mathbb{S}$ kompleks sayılarda bir yarıçaplı, 0 merkezli çember olsun, yani $\mathcal{S} = \{z : |z| = 1\}$.

(1) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.40) \quad \mathcal{C}(\mathbb{S}) = \{u : u : \mathbb{S} \to \mathbb{C}\} \to \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u(x+2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Çözüm $E : \mathbb{R} \ni \theta \to e^{2\pi\theta} \in \mathbb{S}$ üzerine, sürekli ve 2π peryodludur. Çember üzerindeki her noktanın ters görüntüsü,$\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ biçimindedir. Bu fonksiyonların bileşkesi

$$(21.41) \quad E^* : C^0(\mathbb{S}) \to C^0(\mathbb{R}), E^*f = f \circ E$$

bire-bir fonksiyon tanımlar.

Problem 9.2 Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.42) \quad L^2(0, 2\pi) \longleftrightarrow \{u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}), u_{(0,2\pi)} \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$