nin her $g \in L^2(\mathbb{S}$ için tek çözümünüm olması için gerekli ve yeterli koşulun her j için $\lambda \neq \lambda_j$ olacak biçimde $|\lambda_j| \to 0$ ifadesini sağlayan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de bir λ_j dizisinin olduğunu gösteriniz.

(13) Her λ_j için

$$(19.43) \quad \lambda_j v + (F(V-1)F)V = 0, \quad v \in L^2(\mathbb{S})$$

denkleminin çözümünün $\mathbb{R}$ de sürekli 2π periodik olduğunu gösteriniz.

(14) (19.43) de v'yi sağlayan fonksiyona karşılık gelen $u = Fv$ fonksiyonunun ikinci türevi sürekli, $\mathbb{R}$ de 2π periodik ve

$$(19.44) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s_j + s_j V(x))u(x) = 0, \quad s_j = \frac{1}{\lambda_j}$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

(15) Tersine, u sıfıra eşit olmayan ikinci türevi var ve sürekli, 2π periodik fonksiyon,

$$(19.45) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s + sV(x))u(x) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

ise bazı j ler için $s = s_j$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler 9

Periyodik Fonksiyonlar $\mathbb{S}$ kompleks sayılarda bir yarıçaplı, 0 merkezli çember olsun, yani $\mathcal{S} = \{z : |z| = 1\}$.

(1) Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.40) \quad \mathcal{C}(\mathbb{S}) = \{u : u : \mathbb{S} \to \mathbb{C}\} \to \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u(x+2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Çözüm $E : \mathbb{R} \ni \theta \to e^{2\pi\theta} \in \mathbb{S}$ üzerine, sürekli ve 2π peryodludur. Çember üzerindeki her noktanın ters görüntüsü,$\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ biçimindedir. Bu fonksiyonların bileşkesi

$$(21.41) \quad E^* : C^0(\mathbb{S}) \to C^0(\mathbb{R}), E^*f = f \circ E$$

bire-bir fonksiyon tanımlar.

Problem 9.2 Aşağıda 1-1 ilişki olduğunu gösteriniz.

$$(21.42) \quad L^2(0, 2\pi) \longleftrightarrow \{u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}), u_{(0,2\pi)} \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

$$\text{ve} \quad u(x+2\pi) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \setminus \mathcal{N}_P,$$

burada $\mathcal{N}_P$, her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x+2\pi) = u(x)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonların sıfırımsı uzayını göstermektedir.

Çözüm Bizim $L^2(0, 2\pi)$ tanımımız $\mathbb{R}$ üzerinde karesi integrallenebilir ve $(0, 2\pi)$ dışında sıfır olan fonksiyonlar şeklindedir. Şimdi böylesi bir u fonksiyonu verildiğinde onu (21.40) sağ tarafındaki bir fonksiyona sıfır olacak şekilde ve peryodluk ilişkisi

$$(21.43) \quad u\ (x) = u(x - 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$$

kullanarak genişletiriz.Yukarıda $\forall x \in \mathbb{R}$ için n, $x - 2n\pi \in [0, 2\pi)$ olacak şekilde seçilir. Burada sıfırımsı fonksiyonlar sıfırımsı fonksiyonlara giderler ve 0 noktasında fonksiyonun değerini değiştirme u fonksiyonunu sıfırımsı bir fonksiyonla değiştirir. Bu (21.42) daki gibi bir fonksiyon verir. $(0, 2\pi)$ kısıtlaması 2-taraflı ters'tir.

(3) $L^2(\mathbb{S})$, (19.30) nın sol tarafındaki uzayı gösteriyorsa bir

$$(21.44) \quad \mathcal{C}^0(\mathbb{S}) \to L^2(\mathbb{S})$$

yoğun dönüşümün olduğunu gösteriniz. Buradaki fikir $\mathbb{S}$ üzerindeki fonksiyonlar $\mathbb{R}$ de 2π-periodik fonksiyonlar olarak düşünülebileceği hakkındadır.

Çözüm İlk fonksiyon ve ikincisinin tersinin bileşimi aranılan gömme dönüşümüdür.$(0, 2\pi)$ aralığının son noktalarında sıfır olan sürekli fonksiyonlar $L^2[0, 2\pi]$ uzayında yoğun olduklarından, yoğunluk elde edilir. Dolayısıyla $\mathbb{S}$ fonksiyonlarını gerçel sayılar üzerinde 2π- peryodlu fonksiyonlar olarak düşünebilirz. Bunun tersi de doğrudur.

P9.2: Schrödinger operator Aşağıdaki örneği ele alalım.

$$(21.45) \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

(1) önce $V = 1$ alalım. Neden $V = 0$ almıyoruz? Sona kadar bunu yanıtlamaya çalışmayın?

Çözüm $V = 1$ veya herhangi pozitif bir sabit almamızın nedeni $\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$ denkleminin peryodik çözümlerinin bir boyutlu, yani- sabitler- olmasındandır.

(2) $f(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ gerçel sayılarda 2π-periodik fonksiyonlar olmak üzere

$$(21.46) \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

denkleminin çözümünü hatırlayın. $\mathbb{R}$ de (19.33) i sağlayan iki kez türevlenebilen ve ikinci türevi sürekli olan 2π-periodlu tek bir tane u fonksiyonunun olduğunu kanıtlayınız ve bu çözüm

$$(21.47) \quad u(x) = (Sf)(x) = \int_{(0,2\pi)} A(x,y)f(y)$$

olarak yazılabilir, burada $A(x,y) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $A(x+2\pi, y+2\pi) = A(x,y)$ sağlanır.

İpuçu: Önce pedodiklik kısmını yok varsayarak çözüm bulunuz. Bunu yapmak için, içerilen denklemin diferansiyel operatörü faktörize edilebilir. Karşılıklı terimler yok olacağından,

$$(21.48) \quad v = \frac{du}{dx} - v \quad \text{ise} \quad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = -\frac{dv(x)}{dx} + v$$

denklemine bakalım. Integrating faktörleri görmek için aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$(21.49) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dx} - u = e^x \frac{d\Phi}{dx}, \Phi = e^{-x}u \\ \frac{dv}{dx} + v = e^{-x}\frac{d\psi}{dx}, \Phi = e^{-x}u. \end{aligned}$$

Iki kez integral alarak denklemi ǫözünüz ve böylece (21.46) deki diferensiyel denklemin bir çözümünü bulunuz. Bunu iki katlı integral biçiminde açıkca yazınız ve integrallerin yerini değiştirerek çözümü, A', $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ sürekli olmak üzere

$$(21.50) \quad u'(x) \int_{0,2\pi} A'(x,y)f(y)dy$$

biçiminde yazınız. $u'(2\pi) - u'(0)$ ve $\frac{du'}{dx}(2\pi) - \frac{du'}{dx}(0)$ farklarını f'yi içeren integraller formunda hesaplayınız. Ve u' yi homojen denklemin çözümü olarak ekleyiniz, $f = 0$ için $c_1e^x + c_2e^{-x}$ dir, dolayısıyla (21.46) nın yeni çözümü $u(2\pi) = u(0)$ ve $\frac{du}{dx}(2\pi) = \frac{du}{dx}(0)$ ifadelerini sağlar. Şimdi u'nın (21.47) formunda olduğu gibi verildiğini kontrol ediniz.

Çözüm Bir kez daha integral alarak , eğer $v = \frac{du}{dx} - u$ ise

$$(21.51) \quad v(x) = -e^{-x}\int_o^x e^s f(s)ds, u'(x) = e^x \int_0^x e^{-t}v(t)dt$$

bize $-\frac{du^2}{dx^2}+u'(x)=f(x)$ denkleminin bir çözümünü verir.Bu ikiliyi birleştirip,integral alma sırasını değiştirerek,

$$(21.52)\quad u'(x)=\int_0^x A\ (x,y)f(y)dy, A\ =1/2(e^{y-x}-e^{-y+x})$$

$$u'(x)=\int_{(0,2\pi)} A\ (x,y)f(y)dy, A'(x,y)=\begin{cases} 1/2(e^{y-x}-e^{-y+x}), x\geq y \\ 0, x\leq y \end{cases}$$

A , $x=y$ boyunca sıfır olduğundan,A' süreklidir. Bu,sıfır'da, türevi ile birlikte sıfır olan tek çözümdür. Eğer bu çözümü periyodik olarak genişletmek istersek, homojen denklemin bir çözümünü eklemeli ve gerekli düzenlemelerle,

$$(21.53)u=u'', u''=ce^x+de^{-x}, u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi)$$

Şimdi gerekli hesaplar yapılarak,

$$(21.54)u'(2\pi)=\int_0^{2\pi}(e^{y-2\pi}-e^{2\pi-y})f(y), \frac{du'}{dx}(2\pi)=-\int_0^{2\pi} 1/2(e^{y-2\pi}-e^{2\pi-y})f(y)$$

$$(21.55)c(e^{2\pi}-1)+d(e^{-2\pi}-1)=-u'(2\pi), c(e^{2\pi}-1)-d(e^{-2\pi}-1)=-\frac{du'}{dx}(2\pi)$$

$$(e^{2\pi}-1)c=1/2\int_0^{2\pi}(e^{2\pi-y}f(y), (e^{-2\pi}-1)d=-1/2\int_0^{2\pi}(e^{y-2\pi}f(y)$$

Burada bulduklarımızı yerine koyarak,

$$(21.56)u(x)=\int_{0,2\pi} A(x,y)f(y)dy, A(x,y)=A'(x,y)=1/2\frac{e^{2\pi-y+x}}{e^{2\pi}-1}\Rightarrow$$

$$A(x,y)=\frac{cosh(|x-y|-\pi)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

(3) Doğrudan ya da dolaylı olarak $A(x,y) = A(y,x)$ ve A'nın gerçel olduğunu gösteriniz.

Çözüm Şimdi, buradan (21.56) elde edilir.

(4) S opertörünün $L^2(\mathbb{S})$ de sınırlı bir operatöre genişletilebileceği görürüz.

Çözüm $||S|| = \sqrt{2\pi} sup|A|$.

(5) Aşağıdaki ifadeyi doğrulayınız.

$$(21.57) \quad S(e^{ikx}) = (k^2+1)^{-1}e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Çözüm Sf periyodik sınır koşullarını sağlayan tek çözümdür. e^{ikx} sınır değerlerini ve $f = (k^2+1)^{-1}e^{ikx}$ denklemini sağlar.

(6) Az önceki sonuçu kullanarak ya da birbaşka şekilde S'nin $L^2(\mathbb{S})$'nın eşlenik kompakt operatör olduğunu gösteriniz.

Çözüm Özeşleniklik ve kompaktlık (21.57) den elde edilir.Çünkü $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ bir ortonormal taban'dır. Bu nedenle S operatörünün özdeğerleri sıfıra yakınsar.

(7) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ ise Sg'nin iki kez sürekli olarak türevlenebilir olduğunu gösteriniz. Integralin deferansiyelini alarak işlem yapınız.

Çözüm Sf süreklidir.$u' + u''$ tanımlayan formüle geri gidersek, her iki terimin de iki kez türevlenebilir olduğunu görürüz.

(8) F, $L^2(\mathbb{S})$ de tanımlı, özdeğerleri $(k^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ olan eşlenik kompakt olmak üzere $S = F^2$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm $F(e^{ikx}) = (k^2+1)^{-1/2}e^{ikx}$ tanımlayalım. Yukarıdaki biçimde kompakt ve özeşlenik olduğu gösterilir.

(9) $F : L^2(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Sf vektörünü tanımlayan seri

$$(21.58) \quad Sf(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_k (k^2+1)^{-1/2}(f, e^{ikx})e^{ikx}$$

mutlak ve düzgün yakınsaktır,örneğin Cauchy eşitsizliğini kullanarak, sup normunda Cauchy olduğunu aşağıdan öğrenebiliriz:büyük p sayıları için

$$(21.59) \quad ||\sum_{|k|>p}(k^2+1)^{-1/2}(f, e^{ikx})e^{ikx}|| \leq \epsilon ||f||_{L^2}$$

elde ederiz, çünkü özdeğerlerin karelerinin toplamı sonludur.

(10) (21.45) deki gerçel eşitliğe gidelim ve V'nin sürekli, gerçel değerli ve 2π periodik olduğunu varsayalım. u iki kez türevlenebilir, 2π periodik ve verilen bir $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$ için (21.45) sağlanıyorsa;

$$(21.60) \quad u + S((V-1)u) = Sf \quad \text{ve böylece} \quad u = -F^2((V-1)u) + F^2 f$$

olduğunu gösteriniz ve

$$(21.61) \quad v \in L^2(\mathbb{S}) \quad \text{ve} \quad v + (F(V-1)F)v = Ff \quad \text{olmak üzere} \quad u = Fv$$

olduğu sonucuna varınız, burada $V - 1$, $V - 1$ ile çarpılmasıyla elde edilen operatördür.

Çözüm Eğer u, (21.45) denklemini sağlıyorsa,

$$(21.62) \qquad -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) = -(V(x)-1)u(x)) + f(x)$$

sağlanır. Peryodsal sınır koşullarını sağlayan çözümlerin tekliğinden, $u = -S(V-1)u + Sf$ ve buradan da $u = F(-F(V-1)u + Ff)$ buluruz.Dolayısı ile $v = -F(V-1)u + Ff$ olmak üzere $u = Fv$ vardır. Bu ise v'nin

$$(21.63) \quad v + F(V-1)Fv = Ff$$

sağladığını verir.

(11) Tersine, $v \in L^2(\mathbb{S})$

$$(21.63) \quad v + (F(V-1)F)V = fF, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$$

ifadesini sağlıyorsa $u = Fv$, 2π periodik, $\mathbb{R}$ de iki kez türevlenebilen bir fonksiyondur ve (21.45) yi sağlar.

Çözüm Eğer,$v \in L^2(0, 2\pi)$ ve (21.45) denklemini sağlıyorsa $u = Fv \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S})$, $u + F^2(V-1)u = F^2 f$ denklemini sağlar. Üstelik $F^2 = S$, $\mathcal{C}'(\mathbb{S})$ uzayını iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayına götürdüğünden, u fonksiyonu (21.45) denklemini sağlar.

(12) Spektral teoremi $F(V-1)F$'e uygulayınız ve her $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ için

$$(21.65) \quad \lambda v + (F(V-1)F)v = g, \quad g \in L^2(\mathbb{S})$$

nin her $g \in L^2(\mathbb{S})$ için tek çözümünüm olması için gerekli ve yeterli koşulun her j için $\lambda \neq \lambda_j$ olacak biçimde $|\lambda_j| \to 0$ ifadesini sağlayan $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de bir λ_j dizisinin olduğunu gösteriniz.

Çözüm $F(V-1)F$ özeşlenik ve kompakt olduğundan, $L^2(0, 2\pi)$ 'nin $F(V-1)F$ operatörünün özfonksiyonlarından oluşan bir ortonormal tabanı vardır. Bu dizi sıfıra yakınsar. Ve sıfırdan farklı karmaşık sayı λ'nın çözüm olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun izomorfizma, yani-eğer $\lambda \neq \lambda_j$ ise λ, $F(V-1)F$'nın özdeğeri değildir.

(13) Her λ_j için

$$(21.66) \quad \lambda_j v + (F(V-1)F)V = 0, \quad v \in L^2(\mathbb{S})$$

denkleminin çözümünün $\mathbb{R}$ de sürekli 2π periodik olduğunu gösteriniz.

Çözüm $\lambda_j \neq 0$ için v eğer (21.66) denkleminin çözümü ise, $v = -F(V-1)F)V/\lambda_j \in \mathcal{C}'(\mathbb{S})$ dir.

(14) (21.66) de v'yi sağlayan fonksiyona karşılık gelen $u = Fv$ fonksiyonunun ikinci türevi sürekli, $\mathbb{R}$ de 2π periodik ve

$$(21.67) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s_j + s_j V(x))u(x) = 0, \quad s_j = \frac{1}{\lambda_j}$$

eşitliğini sağladığını gösteriniz.

Çözüm $u = Fv$, $u = -S(V-1)u/\lambda_j$ sağlar.Dolayısıyla, iki kez sürekli türevlenebilirdir ve (21.67) denklemini sağlar.

(15) Tersine, u sıfıra eşit olmayan, nın ikinci türevi sürekli, 2π periodik fonksiyon,

$$(21.68) \quad -\frac{d^2u}{dx^2} + (1 - s + sV(x))u(x) = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

ise bazı j ler için $s = s_j$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm$u = -S(V-1)u/\lambda_j$ denkleminin periyodik çözümlerinin tekliğinden daha önceki gibi elde edilir.

(16) (21.45) denklemi için Fredholm alternatifi'nin doğruluğunu gösteriniz.

Teorem 16 Gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve gerçel değerli sürekli 2π peryodlu V fonksiyonu için ya (21.45) sürekli ve 2π peryodlu her f için yine 2π peryodlu, iki kez sürekli türevlenebilen tek bir çözüme , veya

$$(21.69) \quad -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + V(x)w(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

homojen denkleminin sonlu boyutlu, iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan ve 2π-peryodlu fonksiyonlardan oluşan çözüm uzayı vardır. (21.45) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul (21.69) denkleminin her 2π- peryodlu çözümü w için $\int_{(0,2\pi)} fw = 0$ sağlanmasıdır.

Çözüm Bu yukarıdaki $\lambda_j = 1$ olan özel duruma karşılık gelmektedir. Eğer λ_j ,$-F(v-1)F$ in özdeğeri değilse,

$$(21.70) \quad v + F(v-1)Fv = Ff$$

denkleminin her f için tek çözümü vardır, çünkü aksi durumda gerekli ve yeterli koşul $v' + F(V-1)fv' = 0$ denklemini sağlayan her v' için $(v, Ff) = 0$ olmasıdır. Dolayısı ile ya her f için (21.45) biriçik çözüme sahip olacak veya her $w = Fv'$ sağlayan her w için $(Fv', f) = 0$ sağlanacaktır.(Burada F nin bire-bir ve (21.69) sağladığını unutmayınız.

Yukarıdan, Schrödinger operatorünün tüm 2π peryodlu özfonksiyonlarını anlayabiliriz.Önce, $-\frac{d^2}{dx^2}$ ifadesine 1 eklemede ilahi bir şey olmadığını belirtelim, hakikaten herhangi bir pozitif sabit ekleyip, benzeri sonuçu elde edebiliriz. 0 ile ilgili problem $-\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ homojen denklemini sağlayan sabitlerdedir. Gerçekten kanıtladığımız şey;

$$(21.71) \quad u \to Qu = -\frac{d^2u}{dx^2}u + Vu$$

operatörünün iki kez sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı üzerinde sol tersinir olması veya

$$(21.72) \quad -\frac{d^2u}{dx^2}u + Vu = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olmasıdır, bu sol ters $R = F(Id + F(V-1)F)^{-1}F$ dir.Bu operatör kompakt ve özeşlenik'tir. Burada hala yapılacak çok iş vardır.Örneğin,Q operatörünün iki kez türevlenebilir özfonksiyonları ,yani $Qu = \tau u$ denkleminin çözümleri $Ru = \tau^{-1}u$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleridir.

(21.72) denkleminin sıfırdan farklı çözümü o9lduğunda ne yapılmalıdır? Bu durumda bu çözümler uzayının sonlu boyutlu olduğunu ve $L^2(\mathbb{S})$ uzayının orto tümleyeninde çalışarak aynı sonuçun doğru olduğunu gösteriniz.