18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giris Bahar Dönemi 2009

SINAVA HAZIRLIK PROBLEMLERI

(not:bu kısım orjinal metinde iki kez tekrar edilmiştir.)

P1.H iççarpımı $(.,.)$ olan bir Hilbert uzayı olsun. B ise her $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ve H uzayındaki u, u_1, u_2, v vektörleri için

$$(27.1) \quad B(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1B(u_1, v) + c_2B(u_2, v), \quad B(u, v) = \overline{B(v, u)}$$

sağlayan,

$$(27.2) \quad H \times H \to \mathbb{C}$$

bir diğer sesquilinear form ise,B'nin $||(u, v)|| = ||u||_H + ||v||_H$ normuna göre $H \times H$ uzayında sürekli olması için gerek ve yeter koşulun sınırlılık olduğunu, yani, bir $C > 0$ sabiti için

$$(27.3) \quad |B(u, v)| \leq C||u||_H||v||_H$$

olduğunu gösteriniz.

P2. İki (farklı olabilecek) Hilbert uzayı H_1, H_2 arasındaki $T : H_1 \to H_2$ dönüşümünün kompakt olması H_1 uzayının birim yuvarının T altındaki izinin önkompakt olmasıdır. $A : H_1 \to H_2$ bire-bir ve örten sürekli bir dönüşüm $T : H_1 \to H_2$ kompakt ise,kompakt $K : H_2 \to H_1$ ve $T = KA$ sağlayan K dönüşümünün varlığını gösteriniz.

P3. $P \subset H$ sıfırdan farklı bir altuzay ise her $u \in H$ vektörünün $v \in P, v' \perp P$ olmak üzere

$$(27.4) \quad u = v + v'$$

biçiminde tek bir ayrışımının olduğunu ve $\pi_P : u \to v \in P$ dönüşümünün

$$(27.5) \quad (\pi_P)^* = \pi_P, \quad (\pi_P)^2 = \pi^2, ||\pi_P||_{B(H)}$$

sağladığını gösteriniz.

P4.$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve negatif olmayan basamak fonksiyonları f_j dizisi $\sum_j \int f_j < \infty$ anlamında mutlak toplanabiliyorsa, (a, b) aralığındaki her x için $\sum f_j(x)$ serisinin ıraksak olamıyacağını gösteriniz.

P5. sabit her N sayısı için $A_j \subset [-N, N] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere A_j kümelerinin karakteristik fonksiyonları χ_j integrallenebilir olsun.

$$(27.6) \quad A = \bigcup_j A_j$$

kümesinin karakteristik fonksiyonunun intergallenebilir olduğunu gösteriniz.

P6. $c_j > 0$, $C = -\frac{d}{dx} + x$ yaratılış dönüşümü olmak üzere $e_j = c_j C^j e^{-x^2/2}$ fonksiyonları $L^2(\mathbb{R})$ uzayının , aynı zamanda harmonik ösilatörün özfonksiyonları da olan,ortonormal tabanı olsun. $L^2(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde

$$(27.7) \quad Au = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-1/2} (u, e_j)_{L^2} e_j$$

dönüşümünü tanımlayalım.

1) A dönüşümünün $L^2(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde kompakt olduğunu gösteriniz.

2) Eğer $V \in C^0_\infty(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde gerçel değerli, sınırlı ve sürekli ise, V, $L^2(\mathbb{R})$ üzerinde çarpma dönüşümü olmak üzere, $K = AVA$ dönüşümünün özdeğerleri τ_j, özfonksiyonları v_j hakkında neler söylenebilir?

3)Eğer $C > 0$ sabiti yeterince büyük bir sabit sayı ise $Id + A(V + C)A$ dönüşümün tersinir ve tersinin de $L^2(\mathbb{R})$ üzerinde sınırlı olduğunu gösteriniz.

4)$L^2(\mathbb{R})$ uzayının $J = A(Id+A(V+C)A)^{-1}A$ dönüşümünün özfonksiyonlarından oluşan bir ortonormal tabanı olduğunu gösteriniz.

5) J dönüşümünün özfonksiyonlarının

$$(27.8) \quad -\frac{d^2 v_j(x)}{dx^2} + x^2 v_j(x) + V(x) v_j(x) = \lambda_j v_j$$

denklemini sağlamaları için ne göstermeniz gerekir?

6) Kareleri-integrallenebilir, iki kez sürekli türevlenebilir ve (27.8) denklemini kimi $\lambda_j \in \mathbb{C}$ sayıları için sağlayan fonksiyonların K dönüşümünün özfonksiyonları olmaları için ne kanıtlamanız gerekir?

P7. Bu soruda gecen seneki sınav sorularını veriyoruz.

S1) Lebesgue Sınırlı Yakınsama Teoremini hatırlıyarak eğer $u \in L^2(\mathbb{R})$ ve $v \in L^1(\mathbb{R})$ ise, $C_N f(x)$ fonksiyonu

$f(x) > N$ iç in $N, f(x) > N$ iç in N ve diğer durumlarda $f(x)$

$$(1) \quad lim_{N\to\infty} \int_{|x|>N} |u|^2 = 0, lim_{N\to\infty} \int |C_N u - u|^2 = 0$$

$$(1) \quad lim_{N\to\infty}\int_{|x|>N}|v|=0, lim_{N\to\infty}\int|C_N v-v|=0$$

olduğunu gösteriniz.

S2. Basamak fonksiyonlarının $L^2(\mathbb{R})$ ve $L^1(\mathbb{R})$ uzaylarında yoğun olduklarını kanıtlayınız.(İpuçu:Yukarıdaki S1 'e bakarak $f-f_N, F_N=C_N f\chi_{[-N,N]}$ ve bunların karelerini düşünün.Göstermeniz gereken L^2 uzayında f_N fonksiyonunun basamak fonksiyonlarının limiti olduğudur. Eğer g_n fonksiyonları L^1 uzayında f_N fonksiyonuna yakınsayan basamak fonksiyonları ise L^2 uzayında $C_N f\chi_{[-N,N]}$ dizisi f_N fonksiyonuna yakınsar).Ve eğer $f\in L^1(\mathbb{R})$ise, $g\in L^1(\mathbb{R})$ ve bir basamak fonksiyonları dizisi u_n için $|u_n|\le g$ olmak üzere $u_n\to f$ vardır.

S3.$L^2(\mathbb{R})$ ve $L^1(\mathbb{R})$ uzaylarının ayrık, yani, sayılabilir ve yoğun altkümeleri olduğunu kanıtlayınız.

S4. Yerel olarak integrallenebilir olan iki fonksiyonun mimimum ve maksimumunun da yerel olarak integrallenebilir olduğunu kanıtlayınız.

S5.$\mathbb{R}$ kümesinin bir altkümesinin (Lebesgue) ölçülebilir olması bu kümenin karakteristik fonksiyonunun yerel olarak integrallenebilmesi ile tanımlanır. Sayılabir çoklukta ölçülebilir kümenin birleşimin de ölçülebilir olduğunu kanıtlayınız.(ip uçu: iki küme ile başlayınız).

S6.$L^\infty(\mathbb{R})$ uzayı sınırlı ve yerel integralenebilir fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır. Eğer $N_\infty\subset L^\infty(\mathbb{R})$ ölçümü sıfır olan bir kümen,n tümleyeninde sıfır olan fonksiyonların kümesi ise

$$||u+N_\infty||_{L^\infty}=inf_{h\in N_\infty}sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x)+h(x)|$$

ifadesinin $L^\infty((R))=L^\infty(\mathbb{R})/N_\infty$ uzayı üzerinde norm olduğunu gösteriniz.

S7. Eğer $u\in L^\infty(\mathbb{R})$, ve $v\in L^1(\mathbb{R})$ ise $uv\in L^1(\mathbb{R})$ olduğunu ve

$$|\int uv|\le||u||_{L^\infty}||v||_{L^1}$$

olduğunu kanıtlayınız.

S8. Her $u\in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun her $z\in\mathbb{R}$ için $T_z u(x)=u(x-z)\in L^2(\mathbb{R})$ özelliğini ve

$$(5) \quad lim_{|z|\to 0}\int|T_z u-u|^2=0$$

sağladığını gösteriniz.

S9.u_j, $L^2(\mathbb{R})$ uzayı içinde bir Cauchy dizisi ise (1) ve (5) eşitliklerinin j üstünde düzgün olduklarını gösteriniz.Yani verilen $\epsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ bulmalısınızki

$$(6) \quad \int |T_z u_j - u_j|^2 < \epsilon, \int_{|x|>1/\delta} |u_j|^2 < \epsilon, \forall |z| < \delta, \forall j$$

sağlanmalıdır.

S10. $L^2(\mathbb{R})$ içinde öyle bir dizi bulunuzki (6) da düzgünlük sağlamasın.

P8 Geçen seneki ikinci sınav soruları.

(1) d^2/dx^2 için Dirichlet problemini derslerden anımsayarak Neumann problemi olarak tanınan problemin $L^2([0,1])$ uzayı için ortonormal ve tam bir taban teşkil eden ve hepsi de

$$(*)\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = \gamma_n \psi_n(x), \forall x \in [0,1], \frac{d\Psi_n}{dx} = \frac{d\Psi_n}{dx}(0) = \frac{d\Psi_n}{dx}(1) = 0$$

denkleminin özfonksiyonları olan $\psi_n \in C^2$ fonksiyonları bulunuz.Bu sınıfta yaptığımız Dirichlet probleminden biraz daha zor bir sorudur. Bunun nedeni ise normu 1 fakat $\gamma = 0$ için bir özfonksiyon olmasıdır. Bu güçlüğü yenmeniz için kimi ara adımlar veriyoruz:

(*) denkleminin o özdeğerinin özfonksiyonu nedir?

Bu fonksiyon üzerine olan ortogonal projeksiyon dönüşümü hangisidir?

Bu fonksiyonun dikine olan ortogonal projeksiyon dönüşümü hangisidir?

Şimdi de hayati ipuçunu verelim: B sınıfta işlediğimiz dönüşümü,

$$(*1) \quad (Bf(x)) = \int_0^x (x-s)f(s)ds = 0$$

olmak üzere $A_N = B - B_N$, B_N iz uzayı sonlu boyutlu olmak üzere integral dönüşümünü bulunuz. Burada $u = A_N f$ iki kez sürekli türevlenebilen ve $\int_0^1 u(x)dx = 0, A_N 1 = 0$ (1 sabit bir fonksiyonunu göstermektedir).

$$(*2) \quad \int_0^1 f(x)dx = 0 \Rightarrow 0\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)\forall x \in [0,1], \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0$$

A_N dönüşümünü kompakt ve özdevrik dönüşüm olduğunu gösteriniz.

A_N dönüşümünün spekturumunun çekirdeğini bulunuz ve aranılan sonuça hükmediniz.

(2) $L^2([0,1])$ uzayının biri yukarıda bulduğunuz, diğeri sınıfta bulunan iki ortonormal tabanının bir değişken değişimi yapılarak

$L^2([0,\pi])$ için de bir ortonormal taban vereceğini kanıtlayınız.

(3) $L^2([-\pi,\pi])$ uzayı için bir ortonormal taban bulunuz. Bunu şöyle yapabilirsiniz. Her vektörü tek ve çift kısımlarına ayırarak, bunları $[0,\pi]$ aralığına kısıtlayın.Sonra yukarıdaki Neumann tabanını çift kısımlara, Dirichlet tabanını ise tek kısımlara uygulayınız.

(4) Fourier serilere ilişkin temel teoremi kanıtlayınız. Bu teorem $L^2([-\pi,\pi])$ uzayındaki her u fonksiyonunun, her $k \in \mathbb{Z}$ için tek biçimde tanımlı $c_k \in \mathbb{C}$ için $L^2([-\pi,\pi])$ uzayında yakınsayan

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

sağlandığını verir. c_k sayıları için integral formülleri veriniz.

P9. $B \in C([0,1]^2)$ iki değişkenin sürekli bir fonksiyonu olsun.

$$Tu(x) = \int_{[0,1]} B(x,y)u(y)$$

integral dönüşümünün neden $L^1([0,1]) \to C([0,1])$uzayları arasında sınırlı doğrusal bir dönüşüm olduğunu ve buradan da $L^2([0,1])$ üzerindeki sınırlılığını açıklayınız.

(a) T dönüşümünün neden $L^2([0,1]$ uzayı üzerinde sınırlı bir dönüşüm olarak üzerine olmadığını açıklayınız.

(b) ı$d - T$ dönüşümünün sıfır uzayı $N \subset L^2[0,1]$ nin neden sonlu boyutlu olduğunu açıklayınız.

(c) $N \subset C([0,1])$ açıklayınız. (d) $Id - T$ dönüşümünü $L^2([0,1]$ uzayı içindeki izinin neden kapalı olduğunu açıklayınız.

(e) R uzayının dikinin $C([0,1])$ altuzayı olduğunu açıklayınız.

P10. $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ karmaşık sayılardan oluşan sonsuz bir matris ise ve aşağıdaki

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} c_{i,j} < \infty$$

sağlanmakta ise ve eğer e_i ayrık olması gereken H Hilbert uzayının ortonormal bir tabanı ise aşağıdaki biçimde tanımlanan

$$Au = \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij}(u,e_j)e_i$$

dönüşümünün H üzerinde kompakt bir dönüşüm olduğunu kanıtlayınız.