18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giris Bahar Dönemi 2009

TEST 2 ICIN COZUMLER

1. PROBLEM 1

H, iç çapımı $(.,.)$ ve normu $\|.\|$ olan bir Hilbert uzayı olsun. Bir u_n dizisine *zayıf yakınsar* denir eğer her $v \in H$ için (u_n, v), $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi ise.

(1) $\|u_n\|_H$ nin neden sınırlı olduğunu açıklayınız.

Çözüm: Her n için H da

$$(A.1) \quad T_n(u) = (v, u_n), \quad \|T_n\| = \|u_n\|, \quad T_n : H \to \mathbb{C}$$

doğrusal dönüşümü tanımlanır.

Sabit bir v için $T_n(v)$ dizisi Caucyh ve dolayısıyla $\mathbb{C}$ de sınırlıdır. "Düzgün Yakınsama Prensibi gereği" $\|T_n\|$ sınırlı, ve böylece $\|u_n\|$, $\mathbb{R}$ de sınırlıdır.

(2) Her $v \in H$ için $(u_n, v) \to (u, v)$ olacak biçimde bir $u \in H$ nin varlığını gösteriniz.

Çözüm: Her $v \in H$ için (v, u_n), $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olduğundan u_n yakınsaktır.

$$(A.2) \quad Tv = \lim_{n\to\infty} (v, u_n)$$

diyelim. T,

$$(A.3) \quad T(c_1v_1 + c_2v_2) = \lim_{n\to\infty} c_1(v_1, u_n) + c_2(v_2, u) = c_1Tv_1 + c_2Tv_2$$

olduğundan doğrusaldır ve $|Tv| \leq C\|v\|, \quad C = \sup_n \|u_n\|$ olduğundan sınırlıdır. Riesz toreminden $Tv = (v, u)$ olacak biçimde bir $u \in H$ vardır. T'nin tanımından

$$(A.4) \quad (u_n, v) \to (u, v) \quad \forall v \in H$$

dır.

(3) e_i ortonormal taban ise, H zayıf yakınsamayan fakat her j için (u_n, e_j) yakınsayan bir dizi örneği veriniz.

çözüm: $u_n = ne_n$ olarak tamamla. Her $i > n$ için $(u_n, e_i) = 0$ dolayısıyla 0'a yakınsar. Ayrıca $\|u_n\|$ sınırlı değildir, dolayısıyla zayıf yakınsak olamaz.

(4) e_i ortonormal taban, $\|u_n\|$ sınırlı ve her j için (u_n, e_j) yakınsak ise u_n zayıf yakınsar.

Çözüm:Her j için (u_n, e_j)'nin yakınaklığının varsayımımdan dolayı her v için (u_n, v) yakınsaktır ve e_i lerin sonlu doğrusal kombinazasyonudur. Genel v için, e_j ortonormal tabanına göre, v için Fourier-Bessel yakınsamasından

$$(A.5) \quad v = \sum_k (v, e_k) e_k.$$

Bu, v_k'ler e_j ler tarafından gerilen uzaydadır ve $v_k \to v$ dir. Cauchy eşitsizliğinden

$$(A.6)\, |(u_n, v) - (u_m, v)| \leq |(u_n, v_k) - (u_m, v_k)| + |(u_n, v - v_k)| + |(u_m, v - v_k)|.$$

Verilen $\epsilon > 0$ için $\|u_n\|$ sınırlı olduğundan, yeterince büyük k için, son iki terim $\epsilon/4$ den küçük yapılabilir. k, Ilk terimi $\epsilon/4$ den küçük olacak biçiminde seçilmesi durumunda, (u_n, v_k) yakınsar. Bu (u_n, v) dizisinin $\mathbb{C}$ de Cauchy ve böylece yakınsaktır.

2. PROBLEM 2

$f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ fonksiyonu

$$c_k = \int_{(0,2\pi)} f(x) e^{-ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$$

koşulunu sağlasın. $f \in \mathcal{L}^2((0, 2\pi))$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu birazcık zor. Öncelikle, e^{-ikx} sürekli, $fe^{-ikx} \in \mathcal{L}^1((0, 2\pi))$ olduğundan $f \in \mathcal{L}^1((0, 2\pi))$ ve $\sum_k |c_k|^2$ koşulunun sağlanmasından Fourier serisi $L^2(0, 2\pi)$ de yakınsar dolayısıyla

$$(A.1) \quad g = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{C}} c_k e^{ikx}$$

fonksiyonu tanımlanır. $f = g$ h.h olduğunu göstermek istiyoruz. Bu durumda $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ olacaktır.

$\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1((0, 2\pi))$ olduğundan $h = f - g \in \mathcal{L}^1((0, 2\pi))$ dir. $(A.1)$ den dolayı f ve g nin Fourier katsayıları aynıdır ve böylece

$$(A.2) \quad \int_{(0,2\pi)} h(x) e^{ikx} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Şimdi $h = 0$ h.h olduğunu göstermeye gereksinimimiz var. Önceki dersden aralıkların uçlarında sıfır olan sürekli fonksiyonlarda supremum normuna göre eksponensiyel'lerin yoğun olduğu gösterilmişti. Bu biçimdeki sürekli g fonksiyonlar için integrallerin sürekliliğinden,

$$(A.3) \qquad \int_{(0,2\pi)} fg = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bazı noktalarda herhangi bir aralığın karakteristik fonksiyonu χ_I na yaklaşan sürekli fonksiyonların dizisinin olduğu gösterilmişti. Bu yakınsama düzgün değildir, fakat herhangi bir integrallenebilir fonksiyon h için, $\mathcal{L}^1$ de $hg_n \to h\chi_I$. Dolayısıyla $(A.3)$ den

$$(A.4) \qquad \int_{(0,2\pi)} hg = 0 \quad \text{her basamak fonksiyon} \quad g \quad icin.$$

Hünerden dolayı $(A.4)$ den $h = 0$ h.h olduğunu göstermektir. $\int_{(0,2\pi)} |h| = 0$ olduğu biliniyorsa bu elde edilir. Dolayısıyla amaç bu olsun. Hüner: $g \in \mathcal{L}^1$ olduğundan h.h ve $L^1((0,2\pi))$ de $h_n \to g$ olacak biçimde h_n basamak fonksiyonları vardır ve $|h_n| \to |h_n|$ (h.h ve $L^1((0,2\pi))$).

$$(A.5) \quad h_n(x) = 0 \quad \text{icin} \quad s_n(x) = 0, \quad \text{diğer durumda} \quad s_n(x) = \frac{\overline{h_n(x)}}{|h_N(x)|}$$

olarak tanımlansın. s_n'nin sınırlı basamak fonksiyonların dizisidir ve $s_n h_n = |h_n|$ dir. Aşağıdaki güzel eşitliğe bakalım:

$$(A.5) \quad |h(x)| = |h(x)| - |h_n(x)| + s_n(x)(h_n(x) - h(x) + s_n(x)h(x).$$

Bu eşitliğin integralini alarak

$$(A.5) \quad \int_{(0,2\pi)} |h| = \int_{(0,2\pi)} (|h(x)| - |h_n(x)|) + \int_{(0,2\pi)} s_n(x)(h_n - h)$$
$$\leq \int_{(0,2\pi)} (||h(x)| - |h_n(x)|| + \int_{(0,2\pi)} |h_n - h| \to 0.$$

Buradan $|s_n| \leq 1$.

Bu $h = 0$ h.h. Dolayısıyla $f = g$ ve $f \in \mathcal{L}^2((0,2\pi))$.

3. PROBLEM 3

$*$ işareti $+$ ve $-$ işaretlerini göstermek üzere

$$h_*2 = \{c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} j^{*4} |c_j|^2 < \infty$$

olarak tanımlansın. h_{*2} nin Hilbert uzayı olduğunu ve bazı C ler için

$$T : h_2 \to \mathbb{C}, \quad |Tc| \leq C \|c\|_{h_2}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonelin $d : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $d \in h_{-2}$ olmak üzere

$$Tc = \sum_{j=1}^{\infty} c_i d_i$$

biçiminde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: h_{*2}'nin Hilbert uzayı olduğunu göstermek için l^2 nin kendisini kullanacağız. Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$(A.1) \quad (T^* c_j = c_j j^{*2}.$$

h_{*2}'nin hakkında birşey bilmesekte bu birebir ötendir ve

$$(A.2) \quad \|c\|_{h_{*2}} = \|Tc\|_{l^2}.$$

Ayrıca doğrusaldır, buradan h_* nın doğrusal olduğu elde edilir, aslında, T^*, l^2 üzerine isometik izomorfizmadır. Bu durumda h_{*2} deki iç çarpım

$$(A.3) \quad (c, d)_{*2} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{*4} c_j \overline{d_j}.$$

h_2'nin Hilbert uzayı olduğunu biliyoruz. Riesz Teoreminin herhangi bir doğrusal fonksiyonel $T : h_2 \to \mathbb{C}$ ye uygulan—irsa

$$(A.4) \quad Tc = (c, d')_{h_2} = \sum_{j=1}^{\infty} j^4 c_j \overline{d'_j}, \quad d' \in h_2.$$

Şimdi $d' \in h_2$ ise $d_j = j^4 d'_j$, h_{-2} de bir dizi tanımlar. Yani

$$(A.5) \quad \sum_j j^{-4} |d_j|^2 = \sum_j j^{-4} \left|d'_j\right|^2 < \infty.$$

Bunu (A.4)'ye yerleştirerek

$$(A.6) \quad Tc = \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j, \quad d \in h_{-2}$$

elde edilir.