8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

IV.E Tedirgemeli RG(Birinci Mertebe)

Bir önceki bölüm, Landau-Ginzburg Hamiltoniyenle ilgili çeşitli beklenen değerlerin u'nun kuvvetleri şeklinde nasıl tedirgemeli hesaplanabileceğini gösterdi. Ancak, $d < 4$ için, tedirgeme serisi doğasından dolayı, kritik nokta yakınında ıraksar ve kritik davranışı karakterize edemez. Wilson, terdirgeme ve renormalizasyon gurubu yaklaşımlarını birleştirip, kritik üstelleri hesaplamak için sistematik bir metod oluşturulabileceğini gösterdi. Bu doğrultuda, III.G bölümündeki Gaussiyan modelin RG hesaplarını, $\mathcal{U} = u\int d^d\mathbf{x} m^4$'ü bir tedirgeme olarak alarak, Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'ine genişleteceğiz.

1. *Kabalaştır:* RG işleminin en zor adımı budur. Önceki gibi, dalgalanmaları iki bileşene böl:

$$\vec{m}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}) & 0 < q < \Lambda/b \text{ için} \\ \vec{\sigma}(\mathbf{q}) & \Lambda/b < q < \Lambda \text{ için} \end{cases} \tag{IV.28}$$

Bölüşüm fonksiyonunda

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q})\mathcal{D}\vec{\sigma}(\mathbf{q}) \exp\left\{-\int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)(|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 + |\sigma(\mathbf{q})|^2) - \mathcal{U}[\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}), \vec{\sigma}(\mathbf{q})]\right\} \tag{IV.29}$$

iki mod kümesi, $\mathcal{U}$ operatörü tarafından karıştırılırlar. Şeklen, $\{\vec{\sigma}(\mathbf{q})\}$'ların integrallinin sonucu

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}) \exp\left\{-\int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2\right\} \times \\ &\exp\left\{-\frac{nV}{2}\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\ln(t+Kq^2)\right\}\left\langle e^{-\mathcal{U}[\tilde{\vec{m}},\vec{\sigma}]}\right\rangle_\sigma \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}) e^{-\beta\tilde{\mathcal{H}}[\tilde{\vec{m}}]} \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Burada, $Z_\sigma = \int \mathcal{D}\vec{\sigma}(\mathbf{q}) \exp\{-\beta\mathcal{H}_0[\vec{\sigma}]\}$, kısa dalgaboylu salınımların *Gaussiyan* bölüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$\langle\mathcal{O}\rangle_\sigma \equiv \int \frac{\mathcal{D}\vec{\sigma}(\mathbf{q})}{Z_\sigma}\mathcal{O}\exp\left[-\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\sigma(\mathbf{q})|^2\right] \tag{IV.31}$$

kısmi ortalamalarını tanımladık. Denklem IV.30'dan,

$$\beta\tilde{\mathcal{H}}\left[\tilde{\vec{m}}\right] = V\delta f_b^0 + \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 - \ln\left\langle e^{-\mathcal{U}[\tilde{\vec{m}},\vec{\sigma}]}\right\rangle_\sigma \tag{IV.32}$$

elde ederiz.

Son ifade, tedirgeme ile

$$\ln\left\langle e^{-\mathcal{U}}\right\rangle_\sigma = -\langle\mathcal{U}\rangle_\sigma + \frac{1}{2}\left(\langle\mathcal{U}^2\rangle_\sigma - \langle\mathcal{U}\rangle_\sigma^2\right) + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \times \mathcal{U}\text{'nun } \ell\text{. kümülantı} + \cdots \tag{IV.33}$$

olarak hesaplanabilir. Kümülantlar, bir önceki bölümdeki kurallarla hesaplanabilir. Örnek olarak, birinci mertebede hesaplamamız gereken

$$\left\langle \mathcal{U}\left[\tilde{\vec{m}},\vec{\sigma}\right]\right\rangle_\sigma = u\int \frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3 d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4)$$
$$\left\langle \left[\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)+\vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\right]\cdot\left[\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q_2})+\vec{\sigma}(\mathbf{q}_2)\right]\left[\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)+\vec{\sigma}(\mathbf{q}_3)\right]\cdot\left[\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q_4})+\vec{\sigma}(\mathbf{q}_4)\right]\right\rangle_\sigma \tag{IV.34}$$

çarpımını açtığımızda, aşağıdaki tipte terimler gelir:

$$\begin{array}{lll}
[1] & 1 & \left\langle \tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\right\rangle_\sigma \\
[2] & 4 & \left\langle \vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\right\rangle_\sigma \\
[3] & 2 & \left\langle \vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\cdot\vec{\sigma}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\right\rangle_\sigma \\
[4] & 4 & \left\langle \vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\vec{\sigma}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\right\rangle_\sigma \\
[5] & 4 & \left\langle \vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\cdot\vec{\sigma}(\mathbf{q}_2)\vec{\sigma}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\right\rangle_\sigma \\
[6] & 1 & \langle \vec{\sigma}(\mathbf{q}_1)\cdot\vec{\sigma}(\mathbf{q}_2)\vec{\sigma}(\mathbf{q}_3)\cdot\vec{\sigma}(\mathbf{q}_4)\rangle_\sigma
\end{array} \tag{IV.35}$$

Her sıradaki ikinci eleman, verilen ‘simetri’ye sahip terim sayısıdır. Bu katsayıların toplam sayısı $2^4 = 16$’dır. $\langle\mathcal{O}\rangle_\sigma$ ortalamaları sadece kısa dalgaboylu salınımları içerdiği için, sadece $\vec{\sigma}$ ile olan eşleşmeler görülür. Elde edilen iç momentumların, Λ/b’den Λ’ya kadar integrali alınır.

[1] terimi hiç $\vec{\sigma}$ çarpanı içermez, ve $\mathcal{U}[\tilde{\vec{m}}]$’i verir. İkinci ve beşinci terimler, tek sayıda $\vec{\sigma}$ içerirler ve ortalamaları sıfırdır. [3] terimi hiç eşleşme içermez ve

$$-u\times 2\int \frac{d^d\mathbf{q}_1\cdots d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_4)\frac{\delta_{jj}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{t+Kq_1^2}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4) =$$
$$-2nu\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2} \tag{IV.36}$$

verir. [4] teriminde de tek bir eşleşme vardır, ancak hiçbir ilmek (δ_{jj} çarpanı), dolayısıyla hiçbir n çarpanı, içermez. [6] terimindeki 4 $\vec{\sigma}$’nın çeşitli eşleşmeleri, $\tilde{\vec{m}}$’e bağlı olmayan çeşitli terimler verir. Bu terimlerin toplamını $uV\delta f_b^1$ ile gösterelim. Bütün terimleri toplayınca, u mertebesinde kabalaştırılmış Hamiltoniyen

$$\begin{aligned}\beta\tilde{\mathcal{H}}\left[\tilde{\vec{m}}\right] &= V(\delta f_b^0+u\delta f_b^1)+\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{\tilde{t}+Kq^2}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 \\ &\quad +u\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\end{aligned} \tag{IV.37}$$

olur, burada

$$\tilde{t} = t+4u(n+2)\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2} \tag{IV.38}$$

olara tanımlanmıştır. Dolayısıyla, kabalaştırılmış Hamiltoniyen de aynı 3 parametre ile t, K, ve u, tanımlanır. Kabalaştırılmış Hamiltoniyendeki diğer iki parametre değişmez, yani

$$\tilde{K} = K, \quad \text{ve} \quad \tilde{u} = u \tag{IV.39}$$

2. $\mathbf{q} = b^{-1}\mathbf{q}'$ olarak tanımlayarak *Yeniden Ölçekle* ve
3. *Renormalize et*, $\tilde{\vec{m}} = z\vec{m}'$ ve böylece

$$\begin{aligned}(\beta\mathcal{H})'[m'] &= V(\delta f_b^0 + u\delta f_b^1) + \int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}'}{(2\pi)^d} b^{-d} z^2 \left(\frac{\tilde{t} + Kb^{-2}q'^2}{2}\right)|m'(\mathbf{q}')|^2 \\ &+uz^4b^{-3d}\int_0^\Lambda \frac{d^d\mathbf{q}'_1 d^d\mathbf{q}'_2 d^d\mathbf{q}'_3}{(2\pi)^{3d}} \vec{m}'(\mathbf{q}'_1)\cdot\vec{m}'(\mathbf{q}'_2)\vec{m}'(\mathbf{q}'_3)\cdot\vec{m}'(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\end{aligned} \tag{IV.40}$$

elde ederiz. Renormalize edilmiş Hamiltoniyen, üçlü (t', K', u') etkileşimleri ile karakterize edilir, öyle ki

$$t' = b^{-d}z^2\tilde{t}, \quad K'b^{-d-2}z^2K, \quad u' = b^{-3d}z^4u \tag{IV.41}$$

Gaussiyan modelde olduğu gibi $t^* = u^* = 0$'da bir sabit nokta vardır, eğer $z = b^{1+\frac{d}{2}}$ alırsak, öyle ki $K' = K$. Bu nokta civarında, t ve u için yineleme bağıntıları

$$\begin{cases} t'_b &= b^2\left[t + 4u(n+2)\int_{\Lambda/b}^\Lambda \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}\right] \\ u'_b &= b^{4-d}u \end{cases} \tag{IV.42}$$

olarak verilir. Bu mertebede, u için yineleme bağıntısı, boyutsal analiz ile elde ettiğimizle aynı olsa da, t için olan farklıdır. Kesikli yineleme bağıntılarını, sürekli differansiyel denklemlere dönüştürmek oldukça yaygındır; bunun için $b = e^\ell$ alırız, öyle ki, çok küçük bir $\delta\ell$ için

$$t'_b \equiv t(b) = t(1+\delta\ell) = t + \delta\ell\frac{dt}{d\ell} + \mathcal{O}(\delta\ell^2) \;\; , \;\; u'_b \equiv u(b) = u + \delta\ell\frac{du}{d\ell} + \mathcal{O}(\delta\ell^2)$$

Denklem IV.42'yu $\delta\ell$ mertebesine kadar açarsak,

$$\begin{cases} t + \delta\ell\frac{dt}{d\ell} &= (1+2\delta\ell)\left(t + 4u(n+2)\frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+K\Lambda^2}\Lambda^d\delta\ell\right) \\ u + \delta\ell\frac{du}{d\ell} &= (1+(4-d)\delta\ell)u \end{cases} \tag{IV.43}$$

elde ederiz. Buradan, t ve u'nun yeniden ölçekleme altındaki evrimini belirleyen differansiyel denklemler

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\ell} &= 2t + \frac{4u(n+2)K_d\Lambda^d}{t+K\Lambda^2} \\ \frac{du}{d\ell} &= (4-d)u \end{cases} \tag{IV.44}$$

olarak elde edilir. u için olan yineleme bağıntısı, kolayca integrallenebilir ve $u(\ell) = u_0e^{(4-d)\ell} = u_0b^{(4-d)}$ olarak elde edilir.

Yineleme denklemleri, $t^* = u^* = 0$ sabit noktası civarında, $t = t^* + \delta t$ ve $u = u^* + \delta u$ alarak doğrusallaştırılabilir:

$$\frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix}\delta t \\ \delta u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4(n+2)K_d\Lambda^{d-2}}{K} \\ 0 & 4-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta t \\ \delta u\end{pmatrix} \tag{IV.45}$$

Yineleme bağıntılarının differansiyel şeklinde, matrisin özdeğerleri, operatörün önemini belirler. Yukarıdaki matrisin bir tarafında sıfır elemanları olduğu için, özdeğerleri köşegenindeki elemanlardır, ve Gaussiyan modelde olduğu gibi $y_t = 2$ ve $y_u = 4 - d$ olarak belirleyebiliriz. Bu mertebede elde edilen sonuçlar, Gaussiyan modelde boyutsal analizle elde edilenlerle aynıdır. Tek fark, özdoğrultulardır. $y_t = 2$ hala $u = 0$ ile ilişkilendiilmişken, $y_u = 4 - d$ ise aslında $t = -4u(n+2)K_d\Lambda^{d-2}/K$ ile ilişkilendirilmiştir. Bu, geçiş sıcaklığının, u'da birinci mertebede alınganlıktan elde edilen kaymasıyla uyum içindedir.

$d > 4$ için, Gaussiyan sabit noktasının, y_t ile ilişkili sadece tek bir kararsız doğrultusu vardır. Dolayısıyla, faz geçişini doğru olarak tasvir eder. $d < 4$ için, iki önemli yönü vardır ve kararlıdır. Ne yazık ki, bu mertebede, yineleme bağıntılarının başka bir sabit noktası yoktur, ve tedirgemeli RG'den çok az şey öğrendik gibi görünüyor. Ancak, değişmeli bir seriden bahsettiğimiz için, bir sonraki mertebede yineleme bağıntısının, A ve B pozitif olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\ell} &= 2t + \frac{4u(n+2)K_d\Lambda^d}{t+K\Lambda^2} - Au^2 \\ \frac{du}{d\ell} &= (4-d)u - Bu^2 \end{cases} \tag{IV.46}$$

olmasını *bekleyebiliriz*. Şimdi, $d < 4$ için, $u^* = (4-d)/B$'de bir tane daha sabit nokta vardır. Sistematik bir tedirgeme kuramı için, u parametresini küçük tutmalıyız. Dolayısıyla, yeni sabit nokta sadece küçük $\epsilon = 4 - d$ için sistematik olarak incelenebilir; bizi $d = 4$ civarında, uzayın boyutu cinsinden bir açılımı incelemeye götürdü! $\mathcal{O}(\epsilon)$ mertebesinde geçerli olan bir hesap için, yineleme bağıntısında, u'da ikinci mertebedeki, ancak t'de sadece birinci mertebedeki terimleri takip etmemiz lazım. Dolayısıyla, yukarıdaki yineleme bağıntısında A terimini hesaplamak gereksizdir.