8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

IV.F Tedirgemeli RG(İkinci Mertebe)

$\mathcal{U}$'da ikinci mertebede, kabalaştırılmış Hamiltoniyen

$$\beta\tilde{\mathcal{H}}\left[\tilde{\vec{m}}\right] = V\delta f_b^0 + \int_0^{\Lambda/b} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{t+Kq^2}{2}\right)|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2 + \langle\mathcal{U}\rangle_\sigma - \frac{1}{2}\left(\langle\mathcal{U}^2\rangle_\sigma - \langle\mathcal{U}\rangle_\sigma^2\right) + O(\mathcal{U}^3) \tag{IV.47}$$

olur. $(\langle\mathcal{U}^2\rangle_\sigma - \langle\mathcal{U}\rangle_\sigma^2)$'u hesaplamak için, iki $\mathcal{U}$'nun denklem IV.34'deki gibi bütün olası ayrışımlarını düşünmemiz gerekir. Her bir $\mathcal{U}$, denklem IV.35'deki gibi 6 tip terime bölünebileceği için, iki $\mathcal{U}$ için, 6×6'lık bir tablo şeklinde düzenlenebilecek 36 böyle terim vardır. Bu tablodaki elemanların çoğu ya sıfırdır, ya da bu aşamada pek çok sebepten dolayı ihmal edilebilir:

(i) [1] tipinde en az bir çarpan içeren 11 terimin tamamı sıfırdır, çünkü *bağlantılı* parçalar oluşturamazlar, ve kümülant hesabında, ayrık parçalar sadeleşir.

(ii) ([2] $\times$ [3] gibi) 12 terim, *tek* sayıda $\vec{\sigma}$'lar içerdiği ve *parite*den dolayı sıfırdır

(iii) İki terim, [2] $\times$[5] ve [5] $\times$ [2], iki σnin eşleştirildiği ve geriye bir $\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}^<)$ ve bir $\vec{\sigma}(\mathbf{q}^>)$ bırakan köşeler içerir. Bu düzenleme, $\mathbf{q}^> + \mathbf{q}^< \neq \mathbf{0}$ olduğundan ve momentum korunumu sağlayan δ-fonksiyonlarından dolayı sıfırdır.

(iv) [3] $\times$[6], [4]$\times$[6] terimleri, ve iki $\tilde{\vec{m}}$ değişimli eş terimleri. *İki ilmek* integralleri içerirler, ve $\tilde{t}$ katsayısına düzeltme içerirler. Onların net etkisini A ile göstereceğiz, ki daha önce de belirtildiği gibi bu mertebede kesin olarak bilinmeleri gerekmemektedir.

(v) [5]$\times$[5] terimi de, iki $\tilde{\vec{m}}$ terimi içerirken, [2]$\times$[2] terimi böyle 6 çarpan içerir. İkincisi önemlidir, çünkü, parametre uzayının bu mertebede *kapalı olmadığı* anlamına gelir. İlk başta sıfır olsa da, m^6 ile orantılı bir terim RG altında yaratılır. Gerçekte, momentum korunumu etmeni, bu iki terimin de $\mathbf{q}=0$'da sıfır olduğunu gösterir, dolayısıyla q^2m^2 ve q^2m^6'ya katkılardır. Etkileri üzerinde daha sonra yorum yapacağız.

(vi) [6]$\times$[6]'dan gelen katkılar sabitlerdir, ve toptan $u^2V\delta f_b^2$ olarak gösterileceklerdir.

(vii) [3]$\times$[3], [3]$\times$[4], [4]$\times$[3] ve $[4]$$\times$[4] terimleri $\tilde{\vec{m}}^4$'e katkı verirler. Örnek olarak [3]$\times$[3]'ten

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{2} \quad &\times \quad 2\times 2\times 2\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}_1\cdots d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}}\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}_1 d^d\mathbf{k}_2 d^d\mathbf{k'}_1 d^d\mathbf{k'}_2}{(2\pi)^{4d}} \\
&\times \quad (2\pi)^{2d}\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\delta^d(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4) \\
&\times \quad \frac{\delta_{\alpha\alpha'}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{k}_1+\mathbf{k'}_1)}{(t+Kk_1^{2'})}\frac{\delta_{\alpha\alpha'}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{2}_1+\mathbf{k'}_2)}{(t+Kk_2^{2'})}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4) = \\
4nu^2&\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}_1\cdots d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4) \\
&\times \quad \int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(t+Kk^2)(t+K(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{k})^2)}
\end{aligned} \tag{IV.48}$$

elde edilir. [3]$\times$[4], [4]$\times$[3] ve [4]$\times$[4] terimlerinden gelen eşleştirmeler de ön çarpanları sırasıyla 8,8 ve 16 olan benzer ifadeler verirler. $\mathbf{q}_1$ ve $\mathbf{q}_2$ bağımlılıklarından ayrı, son sonuç $\mathcal{U}\left[\tilde{\vec{m}}\right]$

şeklindedir. Gerçekten, son integral

$$f(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)=\int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(t+Kk^2)^2}\left[1-\frac{2K\mathbf{k}\cdot(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)-K(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)^2}{(t+Kk^2)}+\cdots\right] \quad \text{(IV.49)}$$

şeklinde açılabilir. Gerçek uzaya geri Fourier dönüşümünden sonra, m^4 terimine, $m^2(\nabla m)^2$, $m^2(\nabla^2 m^2)$, $\cdots$ gibi ek terimler buluruz.

Bütün katkılar bir araya konduğunda, u^2 mertebesinde kabalaştırılmış Hamiltoniyen

$$\begin{aligned}
\beta\tilde{\mathcal{H}} &= V(\delta f_b^0+u\delta f_b^1+u^2\delta f_b^2)\\
&+\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\tilde{m}(\mathbf{q})|^2\left[\frac{t+Kq^2}{2}+2u(n+2)\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}-\frac{u^2}{2}A(t,K,q^2)\right]\\
&+\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}_1\cdots d^d\mathbf{q}_4}{(2\pi)^{4d}}\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_1)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_2)\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_3)\cdot\tilde{\vec{m}}(\mathbf{q}_4)\\
&\times\left[u-\frac{u^2}{2}(8n+64)\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(t+Kk^2)^2}+\mathcal{O}(u^2q^2)\right]+\mathcal{O}(u^2\tilde{m}^6q^2,\cdots)+\mathcal{O}(u^3)
\end{aligned} \quad \text{(IV.50)}$$

şeklini alır.

IV.G ϵ-Açılımı

Bu mertebede, (K,t,u) parametre uzayı artık kapalı değildir; u'da ikinci mertebede, kabalaştırılmış Hamiltoniyen'de, problemin simetrileri ile tutarlı m^2, m^4 ve m^6 ile orantılı yeni etkileşimler ortaya çıkar. Bu etkileşimleri şimdilik ihmal edersek, kabalaştırılmış parametreler

$$\begin{cases}\tilde{K} &= K-u^2A''(0)\\ \tilde{t} &= t+4(n+2)u\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{t+Kk^2}-u^2A(0)\\ \tilde{u} &= u-4(n+8)u^2\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{(t+Kk^2)^2}\end{cases} \quad \text{(IV.51)}$$

olarak verilir, burada $A(0)$ ve $A''(0)$, denklem IV.50'deki $A(t,K,q^2)$'nin q'nun kuvvetleri cinsinden açılımındaki ilk iki terime karşılık gelir.

Yeniden ölçekledikten $\mathbf{q}=b^{-1}\mathbf{q}'$, ve *renormalize ettikten* $\tilde{\vec{m}}=z\vec{m}'$ sonra, RG işleminin aşamaları,

$$K'=b^{-d-2}z^2\tilde{K},\quad t'=b^{-d}z^2\tilde{t},\quad u'=b^{-3d}z^4\tilde{u} \quad \text{(IV.52)}$$

elde ederiz. Önceden olduğu gibi, z renormalizasyon parametresini $K'=K$ olacak şekilde seçersek

$$z^2=\frac{b^{d+2}}{(1-u^2A''(0)/K)}=b^{d+2}(1+O(u^2)) \quad \text{(IV.53)}$$

elde ederiz. z'nin değeri u^* sabit nokta değerine bağlıdır. Ama u^*, ϵ mertebesinde olduğu için, $z = b^{1+\frac{d}{2}+\mathcal{O}(\epsilon^2)}$, en düşük mertebede değişmez. z'nin bu değerini kullanırsak, ve differansiyel yineleme bağıntılarını oluşturmak için kullandığımız adımları takip edersek,

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\ell} &= 2t + \frac{4u(n+2)K_d\Lambda^d}{t+K\Lambda^2} - A(t,K,\Lambda)u^2 \\ \frac{du}{d\ell} &= (4-d)u - \frac{4(n+8)K_d\Lambda^d}{(t+K\Lambda^2)^2}u^2 \end{cases} \tag{IV.54}$$

Sabit noktalar, $dt/d\ell = du/d\ell = 0$'dan elde edilir. Bir önceki kısımda bahsettiğimiz $u^* = t^* = 0$ Gaussiyan sabit noktasına ek olarak, şimdi,

$$\begin{cases} u^* = \frac{(t^*+K\Lambda^2)^2}{4(n+8)K_d\Lambda^d}\epsilon = \frac{K^2}{4(n+8)K_4}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ t^* = -\frac{2u^*(n+2)K_d\Lambda^d}{t^*+K\Lambda^2} = -\frac{(n+2)}{2(n+8)}K\Lambda^2\epsilon + \mathcal{I}(\epsilon^2) \end{cases} \tag{IV.55}$$

noktasında bayağı olmayan yeni bir sabit nokta vardır. Yukarıdaki ifade, $\epsilon = 4 - d$'de birinci mertebeye kadar olan terimleri tutarak sadeleştirilmiştir.

Yineleme bağıntısını, sabit nokta civarında doğrusallaştırırarak

$$\frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4(n+2)K_d\Lambda^d}{(t^*+K\Lambda^2)^2}u^* - A'u^{*2} & \frac{4(n+2)K_d\Lambda^d}{t^*+K\Lambda^2} - 2Au^* \\ \frac{8(n+8)K_d\Lambda^d}{(t^*+K\Lambda^2)^3}u^{*2} & \epsilon - \frac{8(n+8)K_d\Lambda^d}{(t^*+K\Lambda^2)^2}u^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta u \end{pmatrix} \tag{IV.56}$$

elde ederiz. Gaussiyan sabit noktasında, $t^* = u^* = 0$, denklem IV.45'i yeniden elde ediriz. Denklem IV.55'teki yeni sabit noktada,

$$\frac{d}{d\ell}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4(n+2)K_4\Lambda^4}{K^2\Lambda^4}\frac{K^2\epsilon}{4(n+8)K_4} & \ldots\ldots \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) & \epsilon - \frac{8(n+8)K_4\Lambda^4}{K^2\Lambda^4}\frac{K^2\epsilon}{4(n+8)K_4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta t \\ \delta u \end{pmatrix} \tag{IV.57}$$

elde ederiz. İkinci sütunun ilk elemanını açıkça hesaplamadık, çünkü özdeğerleri hesaplamak için gerekmiyor. Bunun sebebi, ilk sütunun alt elemanının ϵ mertebesine kadar sıfır olmasıdır. Dolayısıyla, özdeğerler, sadece köşegendeki elemanlarla belirlenir. İlk özdeğer pozitiftir, sabit noktanın kararsızlığını denetler,

$$y_t = 2 - \frac{(n+2)}{(n+8)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{IV.58}$$

İkinci özdeğer

$$y_u = -\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{IV.59}$$

$d < 4$ için negatiftir. Dolayısıyla, yeni sabit noktanın koboyutu birdir ve bu boyutlarda faz geçişlerini tasvir edebilir. Birtakım ara sonuçlar, sabit noktanın konumu gibi, K ve Λ gibi mikroskopik parametrelere bağlı olduğu halde, son özdeğerlerin sadece sayı olması, sadece n ve $d = 4 - \epsilon$'a bağlı, oldukça tatmin edicidir. Bu özdeğerler, $d < 4$'te, dönme simetrisi kırılmasının *evrensellik sınıfları*nı karakterize eder. (Uzun erimli etkileşimler, yeni evrensellik sınıfları oluşturabilir.)

Bağdaşıklık uzunluğunun ıraksaması $\xi \sim (\delta t)^{-\nu}$,

$$\nu = \frac{1}{y_t} = \left\{2\left[1 - \frac{(n+2)}{2(n+8)}\epsilon\right]\right\}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{n+2}{n+8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad \text{(IV.60)}$$

üsteli tarafından kontrol edilir. Serbest enerjinin tekil kısmı, $f \sim (\delta t)^{2-\alpha}$ olarak ölçeklenir, ve ısı sığası

$$\alpha = 2 - d\nu = 2 - \frac{(4-\epsilon)}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+8}\epsilon\right] = \frac{4-n}{2(n+8)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad \text{(IV.61)}$$

üsteli ile ıraksar. Kritik üstellerin hesabını tamamlayabilmek için, (ilgili) simetri bozan h alanı ile ilişkili özdeğeri hesaplamamız lazım. Bu, $-\vec{h} \cdot \int d^d\mathbf{x}\vec{m}(\mathbf{x}) = -\vec{h} \cdot \vec{m}(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ terimini ekleyerek kolayca bulunabilir. Bu terim, kabalaştırmadan veya yeniden ölçeklemeden etkilenmez, ve renormalizasyon adımından sonra $-z\vec{h} \cdot \vec{m}'(\mathbf{q} = \mathbf{0})$ halini alır, ki bu

$$h' = zh = b^{1+\frac{d}{2}}h, \quad \Longrightarrow \quad y_h = 1 + \frac{d}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 3 - \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad \text{(IV.62)}$$

olduğu anlamına gelir. Mıknatıslanmanın, $T \to T_c^-$ olurken yok olması

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{d - y_h}{y_t} = \left(\frac{4-\epsilon}{2} - 1\right) \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \qquad \text{(IV.63)}$$

üsteli ile kontrol edilirken, alınganlık $\chi \sim (\delta t)^{-\gamma}$ ki burada

$$\gamma = \frac{2y_h - d}{y_t} = 2 \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon\right) = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + O(\epsilon^2) \qquad \text{(IV.64)}$$

Yukarıdaki sonuçları kullanarak, çeşitli üstelleri d ve n'nin fonksiyonları olarak tahmin edebiliriz. Örnek olarak, $n = 1$ için, denklemler IV.60 ve IV.63'de $\epsilon = 1$ veya 2 alarak, $\nu(1) \approx 0.58$, $\nu(2) \approx 0.67$, ve $\beta(1) \approx 0.33$, $\beta(2) \approx 0.17$ değerlerini elde ederiz. Bu değerlerin $d = 3$ için hesaplanan en iyi tahminler $\nu(2) \approx 0.63$, ve $\beta \approx 0.32$'dir. $d = 2$'de kesin değerlerin $\nu = 1$ ve $\beta = 0.125$ olduğu bilinmektedir. β için olan tahminler oldukça iyiyken, ν için olanlar daha az güvenilirdir. Her durumda, bu tahminlerin, ortalama alan (semer noktası) değerlerine göre bir ilerleme olduklarını görmek önemlidir. Açılım dört boyut civarında olduğu için, sonuçlar $d = 3$'de $d = 2$'de olduğundan daha güvenilirdir. Her durumda, β'nın boyutun azalmasıyla ve ν'nün artmasıyla azalması doğru olarak tasvir edilmiştir. Ayrıca, aşağıdaki $\alpha(n)$ üstellerinin tablosunda da görüleceği üzere, sabit d'de değişen n ile davranışlarını da doğru olarak tasvir eder.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\epsilon = 1$'de $\mathcal{O}(\epsilon)$	0.17	0.11	0.06	0
$d = 3$'te deneyler	0.11	-0.01	-0.12	–

α'nin işareti $n = 2$ ve 3 için yanlış öngörülse de, n arttıkça, α'nın azalması doğru olarak tasvir edilir.