8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

VI.D İki boyutlu İsing Modelinde Öz-Eşleklik

Kramers ve Wannier, kare bir ağdaki İsing modelinin yüksek ve düşük sıcaklıklardaki özellikleri arasında gizli bir simetri buldular. Bu simetriyi elde etmenin yollarından biri, yüksek ve düşük sıcaklıktaki seri açılımlarını kıyaslamaktır Düşük sıcaklık açılımı

$$\begin{aligned} Z &= e^{2NK}\left[1 + Ne^{-4\times 2K} + 2Ne^{-6\times 2K} + \cdots\right] \\ &= e^{2NK} \sum_{(-)\text{ spinli adalar}} e^{-2K\times \text{adanın çevresi}} \end{aligned} \tag{VI.20}$$

şeklindedir. Yüksek sıcaklık serisi ise:

$$\begin{aligned} Z &= 2^N \cosh K^{2N}\left[1 + N\tanh K^4 + 2N\tanh K^6 + \cdots\right] \\ &= 2^N \cosh K^{2N} \sum_{\text{konum başına 2 veya 4 çizgisi olan grafikler}} \tanh K^{\text{grafiğin uzunluğu}} \end{aligned} \tag{VI.21}$$

Her spin adasının sınırı kabul edilebilir bir grafik olduğu için (ve tersi de doğru), iki seri arasında bire-bir bir ilişki vardır. Bir g fonksiyonunu yukarıdaki serinin logaritması olarak tanımlarsak, serbest enerji

$$\frac{\ln Z}{N} = 2K + g(e^{-2K}) = \ln 2 + 2\ln\cosh K + g(\tanh K) \tag{VI.22}$$

olarak verilir. Yukarıdaki denklemdeki g'nin argümanları *eşleklik* koşulu ile birbiriyle ilişkilidir:

$$e^{-2\tilde{K}} \leftrightarrow \tanh K, \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{K} = D(K) \equiv -\frac{1}{2}\ln\tanh K \tag{VI.23}$$

g fonksiyonunun (ki serbest enerjinin tekil kısmını içerir), eşlek argümanlar için değerlerini birbirine ilişkilendiren özel bir simetriye sahip olması gerekmektedir. (Örnek olarak, $f(x) = x/(1+x^2)$ fonksiyonu, $f(x^{-1})$'e eşittir, ki böylece x ve x^{-1}'deki argümanları arasında eşlekliği ortaya koyar.) Denklem VI.23'ün aşağıdaki özellikleri vardır:

1. Düşük sıcaklıklar yüksek sıcaklıklarla eşleşmiştir, ve tersi de doğrudur.

2. Eşleşme nokta *çiftleri*ni birbirine bağlar, çünkü $D(D(K)) = K$. Bu koşul, trigonometrik özdeşlikleri kullanarak

$$\begin{aligned} \sinh 2K &= 2\sinh K\cosh K = 2\tanh K\cosh^2 K \\ &= \frac{2\tanh K}{1-\tanh^2 K} = \frac{2e^{-2\tilde{K}}}{1-e^{-4\tilde{K}}} = \frac{2}{e^{2\tilde{K}} - e^{-2\tilde{K}}} = \frac{1}{\sinh 2\tilde{K}} \end{aligned} \tag{VI.24}$$

olduğunu göstererek kanıtlanabilir. Dolayısıyla, eşlek etkileşimler simetrik olarak

$$\sinh 2K \cdot \sinh 2\tilde{K} = 1 \tag{VI.25}$$

şeklinde ilişkilidir.

3. Eğer $g(K)$ fonksiyonu K_c noktasında tekilse, $\tilde{K}_c$ noktasında da tekil olmalıdır. Serbest enerjinin, geçiş dışındaki her yerde analitik olması beklendiği için, kritik modelin *öz-eşlek* olması gerekmektedir. Öz eşlek noktada,

$$e^{-2K_c} = \tanh K_c = \frac{1 - e^{-2K_c}}{1 + e^{-2K_c}}$$

ki buradan da ikinci dereceden aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$e^{-4K_c} + 2e^{-K_c} - 1 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-2K_c} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Sadece pozitif çözüm kabul edilebilir, ve

$$K_c = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) = 0.441\cdots \qquad \text{(VI.26)}$$

4. Bir sonraki kısımda ve problem kümelerinde araştırılacağı gibi, Pots modeli, XY modeli, vb. pek çok başka spin sistemlerinde de eşlekler bulunabilir. Bu tarz eşlemeler faz sınırlarının şekliyle ilgili sınırlamalar koymak için faydalı olsa da, kritik üstellerle ilgili bilgi vermezler. (Pek çok iki boyutlu modelin öz-eşlekliği, kritik genliklerin oranını bire sınırlar.)

VI.E Üç Boyutlu İsing modelinin Eşleği

Basit kübik bir ağda, İsing modelinin eşleniğini bulmak için aynı işlemi takip etmeyi deneyebiliriz. Düşük sıcaklık serisi

$$\begin{aligned} Z &= e^{3NK}\left[1 + Ne^{-2K\times 6} + 3Ne^{-2K\times 10} + \cdots\right] \\ &= e^{3NK} \sum_{(-)\text{ spinli adalar}} e^{-2K\times \text{adanın sınırının alanı}} \end{aligned} \qquad \text{(VI.27)}$$

Karşılık olarak, yüksek sıcaklık serisi

$$\begin{aligned} Z &= 2^N \cosh K^{3N}\left[1 + 3N\tanh K^4 + 18N\tanh K^6 + \cdots\right] \\ &= 2^N \cosh K^{3N} \sum_{\text{konum başına } 2,\,4,\text{ vey } 6 \text{ çizgisi olan grafikler}} \tanh K^{\text{çizgilerin sayısı}} \end{aligned} \qquad \text{(VI.28)}$$

şeklini alır. Açıkça iki toplam farklıdır, ve $3d$ İsing modeli kendi eşleği değildir. Yüksek sıcaklık serisi, $3d$ İsing modelinin düşük sıcaklıktaki terimlerini üretecek başka bir Hamiltoniyen var mıdır? Böyle bir model oluşturmak için şunlar dikkat edin:

1. Düşük sıcaklık terimleri $e^{-2K\times\text{alan}}$ şeklindedir, ve alan, kubik ağda kapatılan yüzlerin toplamıdır. Dolayısıyla yüksek sıcaklık serisini elde etmek için, *plaketler*, tapı taşları olarak bağların yerini almalıdır.

2. Bu plaketler nasıl birbirlerine bağlanmalıdır? Bir konumun yakınındaki bağların sayısı 3 den 12'ye kadar değer alabilirken, her bağa komşu iki ya da dört yüz vardır. Bu, $\tilde{\sigma}_i = \pm 1$ spinlerini, ağın *bağlan*na yerleştirerek plaketleri birbirine 'yapıştırma'yı akla getirir.

3. İsing modeline benzer şekilde, bölüşüm fonksiyonunu

$$\tilde{Z} = \sum_{\{\tilde{\sigma}_P^i = \pm 1\}} \prod_{P \text{ plaketleri}} (1 + \tanh \tilde{K} \tilde{\sigma}_P^1 \tilde{\sigma}_P^2 \tilde{\sigma}_P^3 \tilde{\sigma}_P^4) \propto \sum_{\{\tilde{\sigma}_i\}} e^{\tilde{K} \sum_P \tilde{\sigma}_P^1 \tilde{\sigma}_P^2 \tilde{\sigma}_P^3 \tilde{\sigma}_P^4} \tag{VI.29}$$

olarak oluşturabiliriz, burada $\tilde{\sigma}_P^i$, her plaketin etrafındaki 4 eşlek spini göstermesi için kullanılmıştır, ve $\tilde{K}$ denklem VI.23'te verilmiştir. Bu bölüşüm fonksiyonu, düşük enerji serisini üretmek bakımından, asıl İsing modeline eşlek bir sistemi tasvir eder. (Üzerine biraz düşünmek, yukarıdaki bölüşüm fonksiyonunu düşük sıcaklık açılımının, İsing modelinin yüksek sıcaklık açılımını üreteceğini gösterir.)

Denklem VI.29, Z_2 ağ ayar teorisini tasvir eder. Bu tarz teorileri her boyutta oluşturmak için genel kurallar şöyledir: **(i)** $\tilde{\sigma}_i = \pm 1$ İsing spinlerini, ağın *bağlarına* yerleştirin. **(ii)** Hamiltoniyen, $-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\text{bütün plaketler}} \prod \tilde{\sigma}_P^i$'dir. Genel $\tilde{\sigma}_i \to -\tilde{\sigma}_i$ simetrisine ek olarak, Hamiltoniyenin, *yerel*(ayar) simetrisi de vardır. Bu simetriyi görmek için, herhangi bir konumu seçin, ve ondan çıkan bütün bağların üzerindeki spinlerin işaretini değiştirin. Seçilen konuma komşu her yüzdeki bağ işaret değiştirdiği için, çarpımları, ve dolayısıyla toplam enerji, değişmez.

Yerel simetrileri olan Hamiltoniyenlerde, kendiliğinden simetrinin kırılamayacağına dair kesin bir ispat vardır (*Elitzur'un Kuramı*). İspatın ruhu, h simetri kıran alanın varlığında bile, bir spinin yönünü değiştirmenin enerji maaliyetinin (kubik ağdaki ayar teorisi için $6h$) sonlu olmasıdır. Dolayısıyla, $h \to 0$ giderken spinin beklenen değeri sürekli olarak değişir. (Karşılaş olarak, İsing modelinde spinin yönünü değiştirmenin maliyeti Nh şeklinde büyür.) Bu kuram bize şu çelişkiyi gösterir: Üç boyutlu İsing modeli faz geçişi gösterdiği için, bölüşüm fonksiyonunda, ve eşleniğininkinde, tekillik olması lazım. Üç boyutlu bir ayar teorisinde, kendiliğinden simetri kırılması yoksa, bölüşüm fonksiyonunda nasıl bir tekillik olabilir?

Bu çelişkiyi çözmek için, Wegner, yerel bir düzen parametresi olmadan faz geçişi olsılığını öne sürdü. Bu zaman, iki faz, bağdaşıklık fonksiyonlarının asimptotik davranışlarıyla birbirlerinde ayrılır. İlgili bağdaşıklık fonksiyonu, yerel ayar dönüşümleri altında değişmez olmalıdır. Mesela, *Wilson İlmeği* ağ üzerinden bağlardan oluşan kapalı bir yol seçerek ve

$$C_S = \langle \text{İlmek üzerindeki } \tilde{\sigma}\text{'ların çarpımı} \rangle = \left\langle \prod_{i \in S} \tilde{\sigma}_i \right\rangle \tag{VI.30}$$

ifadesini inceleyerek oluşturulur. Herhangi bir ayar dönüşümü, ilmekteki iki bağın işaretini değiştirdiği için, çarpımları etkilenmez ve C_S ayar değişmezidir. Hamiltoniyen, aynı işaretli spinleri teşvik ettiği için, bu beklenen değer her zaman pozitiftir. C_S'in yüksek ve düşük sıcaklıklarda, ilmeğin şekline olan bağlılığını inceleyelim. Yüksek sıcaklık açılımında, bağdaşıklık fonksiyonu, S'nin sınırlarını oluşturduğu plaketlerden oluşan diyagramların toplamı olarak elde edilir. Her plaket bir $\tanh \tilde{K}$ çarpanı getirir ve

$$\begin{aligned} C_S &= \frac{1}{Z} \sum_{\{\tilde{\sigma}_i\}} \prod_{i \in S} \tilde{\sigma}_i e^{K \sum_P \tilde{\sigma}_P^1 \tilde{\sigma}_P^2 \tilde{\sigma}_P^3 \tilde{\sigma}_P^4} \\ &= \left(\tanh \tilde{K}\right)^{S\text{'nin alanı}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\tanh \tilde{K}^2\right)\right] \approx \exp\left[-f\left(\tanh \tilde{K}\right) \times S\text{'nin alanı}\right] \end{aligned} \tag{VI.31}$$

Düşük sıcaklık açılımı, en düşük enerjili dizilimle başlar. Gerçekte, ayar dönüşümleri ile birbirlerine ilişkili, $\mathcal{N}_G = 2^N$ tane böyle temel durum vardır. Temel durumda N_P plaket etkileşimleri doymuştur, ve uyarımlar, doymamış plaketler yaratmayı içerir. C_S ayar bağımsız olduğu için, bir tane temel duruma bakmak yeterlidir, mesela bütün i'ler için $\tilde{\sigma}_i = +1$ olana. $3N$ bağdan herhangi birinin işaretini değiştirmek, temel duruma göre enerjisi $8\tilde{K}$ olan bir uyarım yaratır. Wilson ilmeğinin çevresindeki bağların sayısını P_S ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} C_S &= \frac{\mathcal{N}_G}{\mathcal{N}_G} \cdot \frac{e^{\tilde{K}N_P}\left[1 + (3N - P_S)e^{-2\tilde{K}\times 4}(+1) + (-1)P_S e^{-2\tilde{K}\times 4} + \cdots\right]}{e^{\tilde{K}N_P}\left[1 + 3Ne^{-2\tilde{K}\times 4} + \cdots\right]} \\ &= 1 - 2P_s e^{-8\times K} + \cdots \approx \exp\left[-2e^{-8\tilde{K}}P_s + \cdots\right] \end{aligned} \tag{VI.32}$$

Bundan dolayı, C_S'in asimptotik azalması yüksek ve düşük sıcaklıklarda farklıdır. Yüksek sıcaklıklarda, azalma, ilmeğin *alanı* tarafından belirlenirken, düşük sıcaklıklarda, *uzunluğuna* bağlıdır. Faz geçişi, bir tip azalmadan, diğer tip azalmaya geçişi işaretler, ve eşleklikten dolayı, serbest enerjide İsing modeliyle aynı tekilliği vardır.

Fizikteki ayar teorilerinin prototipi kuantum elektrodinamiğidir (KEDİ), eylemi

$$S = \int d^d\mathbf{x}\left[\bar{\psi}(-i\,\partial\!\!\!/ + e\,A\!\!\!/ + m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\right] \tag{VI.33}$$

olarak verilir. ψ spinorü, elektron için Dirac alanıdır, ve A 4-vektörü, elektromanyetik potansiyeli tasvir eder. ψ'ın fazı gözlemlenebilir değildir, ve eylem, herhangi bir $\phi(\mathbf{x})$ için, $\psi \mapsto e^{ie\phi}\psi$ ve $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu\phi$ ayar simetrisi altında değişmez. Z_2 ağ ayar teorisi, QED'nin İsing benzeri olarak düşünülebilir, ki bağ spinleri, elektromanyetik alan rolünü oynar. $s_i = \pm 1$ spinlerini, ağın konumlarına yerleştirerek 'madde' alanlarını dahil edebiliriz. İki alan,

$$-\beta\mathcal{H} = J\sum_{\langle i,j\rangle} s_i\tilde{\sigma}_{ij}s_j + K\sum_P \tilde{\sigma}_P^1\tilde{\sigma}_P^2\tilde{\sigma}_P^3\tilde{\sigma}_P^4 \tag{VI.34}$$

Hamiltoniyeni ile etkileşir, burada $\tilde{\sigma}_{ij}$, i ve j konumlarını bağlayan bağın üzerindeki spindir. Hamiltoniyen'in herhangi bir i konumundaki bağlardan çıkan bütün bağlar için $s_i \mapsto (-1)s_i$ ve $\tilde{\sigma}_{i,\mu} \mapsto -\tilde{\sigma}_{i,\mu}$ ayar simetrisi vardır.

Ağ doğrultularından birini zaman olarak düşünürsek, birbirlerinde x uzaklıkta iki parçacık yaratıp, t kadar zamanda ilerletip, o zaman yok ederek, Wilson ilmeği elde edilir. Böyle bir olayın olasılığı, yaklaşık olarak $C_s \sim e^{-U(x)t}$ ifadesiyle verilir, $U(x)$ iki parçacık arasındaki etkileşim olmak üzere. Yüksek sıcaklık fazında, C_S ilmeğin alanıyla azalır, ki bu $U(x)t = f(\tanh\tilde{K})|x|t$ olduğunu ima eder. Elde edilen $U(x) = f(\tanh\tilde{K})|x|$ potansiyeli, parçacıkları birbirine bağlayan bir *sicim* gibidir. Bu aynı zamanda, kuantum renk dinamiğinde, kuarkların hapis olmasını tasvir eden potansiyel gibidir. Düşük sıcaklıklarda, ilmeğin uzunluğuyla azalma $U(x)t \approx g(e^{-8\tilde{K}})(|x| + t)$ olduğu anlamına gelir. $t \gg |x|$ için, potansiyel sabittir ve kuvvet yok olur. (Bu *asimptotik serbestlik*, kuarkların kısa mesafelerdeki davranışlarını tasvir eder.) Faz geçişi, ayar alanları ile parçacıklar arasında taşınan kuvvetin doğasında değişim anlamına gelir.