8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

## VI.H İki Boyutlu İsing Modelinin Kritik Davranışı

Denklem VI.73'teki iki boyutlu İsing modelinin serbest enerjisinin tekilliğini anlamak için, VI.F kısmındaki, hayalet ilmekler üzerindeki sınırlandırılmamış toplamla elde edilen daha basit ifadeden başlayacağız. Denklem VI.53'e $d = 2$ durumunda bakarsak:

$$f_G = \ln\left(2\cosh^2 K\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \ln\left[1 - 2t(\cos q_x + \cos q_y)\right] \quad \text{(VI.75)}$$

Logaritmanın argümanı dışında, bu ifade, tam sonuca benzer. Bu tür benzer fonksiyonel formların farklı tekil davranışlara yol açması mümkün müdür? Tekillik logaritmanın argümanının $t_c = 1/4$'da sıfır olmasından kaynaklanır. Bu noktanın civarında, denklem VI.50'dekine benzer bir açılım yaparız,

$$A_G(t, \mathbf{q}) = (1 - 4t) + tq^2 + \mathcal{O}(q^4) \approx t_c\left(q^2 + 4\frac{\delta t}{t_c}\right) \quad \text{(VI.76)}$$

burada $\delta t = t_c - t$'dir. Denklem VI.75'in tekil kısmı, integrali alınan ifadenin $\mathbf{q} \to \mathbf{0}$ iken davranışına odaklanarak elde edilebilir, ve integral alınan bölge olan kare Brillouin bölgesini, çapı $\Lambda \approx 2\pi$ olan bir çemberle değiştirirsek,

$$\begin{aligned} f_{\text{tekil}} &= -\frac{1}{2}\int_0^\Lambda \frac{2\pi q dq}{4\pi^2} \ln\left(q^2 + 4\frac{\delta t}{t_c}\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi}\left[\left(q^2 + 4\frac{\delta t}{t_c}\right)\ln\left(\frac{q^2 + 4\delta t/t_c}{e}\right)\right]_0^\Lambda \end{aligned} \quad \text{(VI.77)}$$

Sadece $q = 0$'da hesaplanan ifade tekildir ve

$$f_{\text{tekil}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\delta t}{t_c}\right)\ln\left(\frac{\delta t}{t_c}\right) \quad \text{(VI.78)}$$

Elde edilen ısı sığası, $C_G \propto \partial^2 f_G/\partial^2 t$, $1/\delta t$ şeklinde ıraksar. Denklem VI.75, $t > t_c$ için geçerli olmadığı için, soğuk sıcaklık tarafında ısı sığasının davranışını elde edemeyiz.

Denklem VI.73'teki kesin sonuç için, logaritmanın argümanı:

$$A^*(t, \mathbf{q}) = (1 + t^2)^2 - 2t(1 - t^2)(\cos q_x + \cos q_y) \quad \text{(VI.79)}$$

Bu ifadenin $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ için en küçük değeri

$$A^*(t, \mathbf{0}) = (1 + t_c^2)^2 - 4t_c(1 - t_c^2) = (1 - t_c^2)^2 + 4t_c^2 - 4t_c(1 - t_c^2) = (1 - t_c^2 - 2t_c)^2 \quad \text{(VI.80)}$$

Bu ifade (ve dolayısıyla logaritmanın argümanı) hiçbir zaman negatif olmadığı için, integral bütün $t$ değerleri için vardır. Gerekli olduğu gibi, denklem VI.75'ten farklı olarak, kesin sonuç, *bütün* sıcaklıklarda geçerlidir. Tekillik, argüman

$$t_c^2 + 2t_c - 1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t_c = -1 \pm \sqrt{2} \quad \text{(VI.81)}$$

için sıfır olduğunda vardır. Pozitif çözüm, bir ferromanyeti tasvir eder ve VI.D bölümündeki eşleklik tartışmaları ile uyumlu bir şekilde, $K_c = \ln(\sqrt{2}+1)/2$ değerini verir. $\delta t = t - t_c$ alarak ve denklem VI.79'u $\mathbf{q} \to \mathbf{0}$ civarında açmak

$$\begin{aligned} A^*(t,\mathbf{q}) &\approx [(-2t_c-2)\delta t]^2 + t_c(1-t_c^2)q^2 + \cdots \\ &\approx 2t_c^2\left[q^2 + 4\left(\frac{\delta t}{t_c}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{VI.82}$$

verir. Denklem VI.76'dan önemli farkı, $(\delta t/t_c)$'nin ikinci mertebede gelmesidir. Denklemler VI.77 ve VI.78'deki basamakları takip edersek, serbest enerjini tekil kısmı:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\ln Z}{N}\right|_{\text{tekil}} &= \frac{1}{2}\int_0^\Lambda \frac{2\pi q dq}{4\pi^2}\ln\left[q^2+4\left(\frac{\delta t}{t_c}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{8\pi}\left[\left(q^2+4\left(\frac{\delta t}{t_c}\right)^2\right)\ln\left(\frac{q^2+4(\delta t/t_c)^2}{e}\right)\right]_0^\Lambda \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\delta t}{t_c}\right)^2\ln\left|\frac{\delta t}{t_c}\right| + \text{analitik terimler} \end{aligned} \tag{VI.83}$$

olur. Isı sığası, iki defa türev alarak elde edilir ve $C(\delta t)_{\text{tekil}} = A_\pm \ln|\delta t|$ şeklinde ıraksar. Logaritmik tekillik $\alpha = 0$'a karşılık gelir; tepe simetriktir, $A_+/A_- = 1$ genlikleri ile karakterize edilir.

Kare ağdaki İsing modelinin tam bölüşüm fonksiyonu ilk olarak 1944'te Lars Onsager (Phys. Rev. **D**, sayfa 117) tarafından hesaplanmıştır. Onsager, $L$ genişliğindeki bir ağı incelemek için $2^L \times 2^L$ bir aktarma matrisi kullanmıştır. Ondan sonra, matrisin çeşitli simetrilerini bulmuştur, ki bunlar, matrisi köşegenleştirmesine olanak vermişlerdir, ve en büyük özdeğeri $L$'nin fonksiyonu olarak hesaplamıştır. Herhangi sonlu bir $L$ için, bu öz değer, Frobenius'un teoreminin gerektirdiği gibi yozlaşmamıştır. $L \to \infty$ limitinde, $K_c$'de en üst iki özdeğer yoz hale gelir. Bu limitteki çözüm, doğal olarak denklem VI.74'teki çözümle çakışır. Onsager'in makalesi oldukça uzun ve karmaşıktır, ve mathematiksel fizik de *tour de force* olarak görülür. Bir şekilde kolaylaştırılmış hali, B. Kaufman tarafından geliştirilmiştir (Phys. Rev. **76**, 1232 (1949)), ve aşağı yukarı Huang'in 15inci bölümünde türetilmiştir. Bu kesin çözüm, ilk defa, faz geçişlerindeki kritik davranışın, Landau (ortalama alan) teorisinin gösterdiğinden çok daha farklı olabileceğini gösterdi. İki sonucu, RG ile uyum içerisine getirmek 30 yıldan fazla aldı.

Bu bölümde anlatılan grafik yöntem, ilk defa Kac ve Ward (Phys.Rev. **88**, 1332 (1952)) tarafından geliştirildi. Sonucun çıkarımındaki temel parça, yolların doğru sayımının, her kesişme için $(-1)$ çarpanı dahil edilerek yapılmasıdır. (Feynman'ın bu varsayımı S. Sherman tarafından ispatlanmıştır J. Math. Phys. **1** 202 (1960).) İşaret değiştirme, fermiyonlar arasındaki yer değiştirme çarpanına benzer. Gerçekten de Schults, Mattis ve Liev (Rev. Mod. Phys **36**, 856 (1964)), Onsager'in aktarma matrisinin nasıl tek boyutta etkileşmeyen fermiyonların evrilmelerini sağlayan Hamiltoniyen olarak düşünülebileceğini gösterdi. Pauli dışlama ilkesi, iki boyutlu uzay- zamanda, bu fermiyonların dünya çizgilerinin kesişmesini engeller.

Bölüşüm fonksiyonuna ek olarak, $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle$ bağdaşıklık fonksiyonu da, yollar üzerinden toplam olarak hesaplanabilir (bkz. Itzykson ve Drouffe, *Statistical Field Theory: 1*). Denklem VI.82'deki $q^2 + 4(\delta t/t_c)^2$ ifadesi, bu rastgele yürüyüşleri tasvir ettiği için, bağdaşıklık uzunluğunun $\xi \sim$

$|t_c/\delta|$ olmasını bekleriz, yani faz geçişini iki tarafında da genliklerinin oranının birim olmasını ve üstelinin $\nu = 1$ olmasını. $\alpha$ ve $\nu$ üstelleri, hiperölçeklenme bağıntısı $\alpha = 2 - 2\nu$ ile birbirine bağlıdır. $t_c$'deki kritik bağdaşıklıklar daha zordur ve $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle \sim 1/|\mathbf{i} - \mathbf{j}|^\eta$, $\eta = 1/4$ olmak üzere, şeklinde azalırlar. Bağdaşıklık fonksiyonunun integralini almak, alınganlığı verir, ki $\gamma = 7/4$ ve $C_+/C_- = 1$ ile $\xi_\pm \simeq C_\pm |\delta t|^{-\gamma}$ şeklinde ıraksar. Sıfır manyetik alan mıknatıslığının

$$m = \left(1 - \sinh^{-4}(2K)\right)^{1/8} \tag{VI.84}$$

şeklindeki basit ifadesi Onsager tarafından ispatlanmadan verilmiştir. Bu sonucun oldukça zor bir çıkarımı, sonunda, C. N. Yang (Phys. Rev. **85**, 808 (1952)) tarafından verilmiştir. $\beta = 1/8$ üsteli, gerekli üstel özdeşlikleri sağlar.