8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

VII. Düşük Sıcaklıklardaki Sürekli Spinler

VII.A Doğrusal Olmayan σ-Modeli

Daha önce, *kesikli* spinler için (İsing, Potts, vb.) düşük sıcaklık açılımını inceledik, ki bunlarda, düşük enerji uyarımları, kendiliğinden kırılan simetri tarafından seçilen düzgün bir fonda, yanlış spin damlacıklarıdır. Bu uyarımlar, küçük ölçeklerde olurlar, ve ağ üzerinde grafiklerle kolayca tasvir edilebilirler. Buna karşın, *sürekli* spinler için, düşük enerji uyarımları, II.C bölümünde tartışıldığı gibi, uzun dalga boylu Goldstone modlarıdır. Bu modların termal uyarımları, $d \leq 2$ boyutlarında uzun erimli düzeni yok ederler. d, 2'ye yakın olduğunda, kritik olguları incelemek için, kritik sıcaklık, düşük sıcaklık açılımını geçerli bir araç yapacak kadar küçük olmalıdır. Sırada göstereceğimiz gibi, böyle bir yaklaşım, Goldstone modları arasındaki etkileşimleri takip etmeyi gerektirir.

Ağın konumlarında, n bileşenli, birim spinleri düşünün, yani

$$\vec{s}(\mathbf{i}) = (s_1, s_2, \cdots, s_n), \quad |\vec{s}(\mathbf{i})|^2 = s_1^2 + \cdots + s_n^2 = 1 \text{ olmak üzere} \tag{VII.1}$$

Her zamanki en yakın komşu Hamiltoniyeni

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle \mathbf{ij} \rangle} \vec{s}(\mathbf{i}) \cdot \vec{s}(\mathbf{j}) = K \sum_{\langle \mathbf{ij} \rangle} \left(1 - \frac{(\vec{s}(\mathbf{i}) - \vec{s}(\mathbf{j}))^2}{2} \right) \tag{VII.2}$$

olarak yazılabilir. Düşük sıcaklıklarda, komşu spinler arasındaki salınımlar küçüktür ve VII.2'deki fark, gradyantla değiştirilebilir. Birim ağ aralığı varsayarak,

$$-\beta\mathcal{H} = -\beta E_0 - \frac{K}{2} \int d^d\mathbf{x} \, (\nabla \vec{s}(\mathbf{x}))^2 \tag{VII.3}$$

burada, kesikli $\mathbf{i}$ indeksi, sürekli $\mathbf{x} \in \Re^d$ vektörü ile yer değiştirilmiştir. Dolayısıyla, $\Lambda \approx \pi$ sınırı, denklem VII.3'te açıkça yazılmamıştır. Temel durum enerjisini ihmal edersek, bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \int \mathcal{D} \left[\vec{s}(\mathbf{x}) \delta \left(s(\mathbf{x})^2 - 1 \right) \right] e^{-\frac{K}{2} \int d^d\mathbf{x} (\nabla \vec{s})^2} \tag{VII.4}$$

olur.

Olası bir temel durum konfigürasyonu $\vec{s}(\mathbf{x}) = (0, \cdots, 1)$'dir. Dikine salınımları tasvir eden $n-1$ Goldstone modu vardır. Sıfır sıcaklık yakınında, bu salınımların etkilerini incelemek için

$$\vec{s}(\mathbf{x}) = (\pi_1(\mathbf{x}), \cdots, \pi_{n-1}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}) \equiv (\vec{\pi}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})) \tag{VII.5}$$

alalım, burada $\vec{\pi}(\mathbf{x})$, $n-1$ bileşenli bir vektördür. Spinin birim uzunluğu, $\sigma(\mathbf{x})$'i, $\vec{\pi}(\mathbf{x})$ cinsinden belirler. Her serbestlik derecesi için,

$$\begin{aligned}\int d\vec{s}\delta(s^2-1) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\pi} d\sigma \delta(\pi^2+\sigma^2-1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\pi} d\sigma \delta\left[\left(\sigma-\sqrt{1-\pi^2}\right)\left(\sigma+\sqrt{1-\pi^2}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vec{\pi}}{2\sqrt{1-\pi^2}}\end{aligned} \tag{VII.6}$$

burada, $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$ özdeşliğini kullandık. Bu sonucu kullanarak, denklem VII.4'teki bölüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned}Z &\propto \int \frac{\mathcal{D}\vec{\pi}(\mathbf{x})}{\sqrt{1-\pi(\mathbf{x})^2}} e^{-\frac{K}{2}\int d^d\mathbf{x}\left[(\nabla\vec{\pi})^2+(\nabla\sqrt{1-\pi^2})^2\right]} \\ &= \int \mathcal{D}\vec{\pi}(\mathbf{x}) \exp\left\{-\int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla\vec{\pi})^2+\frac{K}{2}\left(\nabla\sqrt{1-\pi^2}\right)^2+\frac{\rho}{2}\ln(1-\pi^2)\right]\right\}\end{aligned} \tag{VII.7}$$

olarak yazılabilir. Ağdan sürekliliğe geçerken, ağdaki noktaların yoğunluğunu $\rho = N/V = 1/a^d$ kullandık. Birim ağ aralığı için $\rho = 1$'dir, ancak renormalizasyon için ρ'yu keyfi tutacağız. İlk Hamiltoniyen oldukça basit olduğu halde, $\vec{\pi}(\mathbf{x})$ Goldstone modlarını tasvir eden, oldukça karmaşıktır. Belirli bir temel durum seçerken, dönme simetrisi kırılmıştı. Denklem VII.7'deki doğrusal olmayan terimler, sadece $\vec{\pi}$'yi göz önü aldığımızda, simetrinin doğru olarak yansıtılmasını sağlarlar.

Etkin Hamiltoniyendeki, doğrusal olmayan terimleri $\vec{\pi}(\mathbf{x})$ cinsinden açarak

$$\beta\mathcal{H}\left[\vec{\pi}(\mathbf{x})\right] = \beta\mathcal{H}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots \tag{VII.8}$$

serisini elde ederiz, burada

$$\beta\mathcal{H}_0 = \frac{K}{2}\int d^d\mathbf{x}\,(\nabla\vec{\pi})^2 \tag{VII.9}$$

birbirlerinden bağımsız Goldstone modlarını tasvir ederken

$$\mathcal{U}_1 = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\vec{\pi}\cdot\nabla\vec{\pi})^2 - \frac{\rho}{2}\pi^2\right] \tag{VII.10}$$

serideki terimler $T = 1/K$'nın kuvvetleri cinsinden ayarlanınca, ilk mertebeden tedirgemedir. Salınımların $\langle\pi^2\rangle \propto T$ olmasını beklediğimizden, $\beta\mathcal{H}_0$ bir mertebesinde, $\mathcal{U}_1$'deki iki terim T mertebesinde; geri kalan terimler de T^2 veya daha yüksek mertebededir. Fourier modları dilinden

$$\begin{aligned}\beta\mathcal{H}_0 &= \frac{K}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}q^2|\vec{\pi}(\mathbf{q})|^2 \\ \mathcal{U}_1 &= -\frac{K}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}\pi_\alpha(\mathbf{q}_1)\pi_\alpha(\mathbf{q}_2)\pi_\beta(\mathbf{q}_3)\pi_\beta(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3) \\ &\quad -\frac{\rho}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\vec{\pi}(\mathbf{q})|^2\end{aligned} \tag{VII.11}$$

Etkileşmeyen (ikinci mertebe) teori için, Goldstone modlarının bağdaşıklık fonksiyonu

$$\langle \pi_\alpha(\mathbf{q})\pi_\beta(\mathbf{q}')\rangle_0 = \frac{\delta_{\alpha,\beta}(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')}{Kq^2} \tag{VII.12}$$

olur. Sonuç olarak, gerçek uzaydaki salınımlar

$$\langle \pi(\mathbf{x})^2\rangle_0 = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\langle \mid \vec{\pi}(\mathbf{q})^2 \mid\rangle_0 = \frac{(n-1)}{K}\int_{1/L}^{1/a}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2} = \frac{(n-1)}{K}\frac{K_d(a^{2-d}-L^{2-d})}{(d-2)} \tag{VII.13}$$

olarak davranırlar. $d > 2$ için, salınımlar gerçekten T'den bağımsızlardır. Ancak, $d \leq 2$ için, $L \to \infty$ iken ıraksarlar. Bu $d \leq 2$ için uzun erimli düzenin olamayacağı üzerine Mermin-Wagner kuramının bir sonucudur. Polyakov (1975), bunun böyle sistemlerde kritik sıcaklığın $T_c \sim \mathcal{O}(d-2)$ olduğu anlamına geldiğini, ve T'nin kuvvetleri üzerinden bir RG açılımı, iki boyut yakınlarındaki kritik davranışı incelemenin sistematik bir yolu olabileceğini iddia etmiştir. Tedirgemeli bir RG oluşturmak için, Λ yarıçaplı bir Brillouin bölgesi düşünün, ve modları $\vec{\pi}(\mathbf{q}) = \vec{\pi}^<(\mathbf{q}) + \vec{\pi}^>(\mathbf{q})$ olarak bölelim. $\vec{\pi}^<$ modları, $0 < |\mathbf{q}| < \Lambda/b$ momentumlarını içerirken, momentumu $\Lambda/b < |\vec{q}| < \Lambda$ kabuğunda olan kısa dalga boylu $\vec{\pi}^>$ salınımları üzerinden integral alacağız. T mertebesine kadar, kabalaştırılmış Hamiltoniyen

$$\beta\tilde{\mathcal{H}}\left[\vec{\pi}^<\right] = V\delta f_b^0 + \beta\mathcal{H}_0\left[\vec{\pi}^<\right] + \langle\mathcal{U}_1\left[\vec{\pi}^< + \vec{\pi}^>\right]\rangle_0^> + \mathcal{O}(T^2) \tag{VII.14}$$

olur, burada $\langle\ \rangle_0^>$, $\vec{\pi}^>$ üzerinden ortalamayı göstermektedir. Denklem VII.11'deki ρ ile orantılı olan terim, iki katkı verir, biri serbest enerjiye sabit bir katkıdır ($\langle(\pi^>)^2\rangle$ teriminden), ve diğeri sadece $\rho(\pi^<)^2$'dir. ($\vec{\pi}^< \cdot \vec{\pi}^>$ çapraz terimi simetriden dolayı yok olur.) $\mathcal{U}_1$'in dördüncü dereceden kısmı 16 terim yaratır. Banal olmayan katkı iki $\vec{\pi}^<$ ve iki $\vec{\pi}^>$ çarpımından elde edilir. Üç tip böyle karkı vardır; ilki

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{U}_1^a\rangle_0^> &= 2\times\frac{-K}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3)\\ &\quad\langle\pi_\alpha^>(\mathbf{q}_1)\pi_\alpha^>(\mathbf{q}_2)\rangle_0^>\pi_\beta^<(\mathbf{q}_3)\pi_\beta^<(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\rangle\end{aligned} \tag{VII.15}$$

şeklindedir. $\mathbf{q}_1$ kabuk momentumu üzerinden integral tektir ve katkısı sıfırdır. (farklı α ve β indeksli terimlerin eşleşmesinden gelen benzer iki terim sıfır verir). Sonraki terim, ρ'nun renormalizasyonudur, ve

$$\begin{aligned}\left\langle\mathcal{U}_1^b\right\rangle_0^> &= -\frac{K}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3)\\ &\quad\left\langle\pi_\alpha^>(\mathbf{q}_1)\pi_\beta^>(\mathbf{q}_3)\right\rangle_0^>\pi_\alpha^<(\mathbf{q}_2)\pi_\beta^<(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\\ &= \frac{K}{2}\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\vec{\pi}^<(\mathbf{q})|^2\times\int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{Kk^2}\\ &= \frac{\rho}{2}\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\vec{\pi}^<(\mathbf{q})|^2\times(1-b^{-d})\end{aligned} \tag{VII.16}$$

ifadesinden gelir. (Genelde $\rho = N/V = \int_0^\Lambda d^d\mathbf{q}/(2\pi)^d$ olduğuna dikkat edin.) Son olarak, K'nın renormalizasyonu

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U}_1^c \rangle_0^> &= -\frac{K}{2}\int \frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_3 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3) \\ &\quad \left\langle \pi_\alpha^>(\mathbf{q}_2)\pi_\beta^>(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)\right\rangle_0^> \pi_\alpha^>(\mathbf{q}_1)\pi_\beta^<(\mathbf{q}_3) \\ &= \frac{K}{2}\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}q^2|\vec{\pi}^<(\mathbf{q})|^2\times\frac{I_d(b)}{K}\end{aligned} \tag{VII.17}$$

ifadesinden gelir, burada

$$I_d(b) \equiv \int_{\Lambda/b}^{\Lambda}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} = \frac{K_d\Lambda^{d-2}(1-b^{2-d})}{(d-2)} \tag{VII.18}$$

Denklem VII.14'teki kabalaştırılmış Hamiltoniyen, şimdi

$$\begin{aligned}\beta\tilde{\mathcal{H}}\left[\vec{\pi}^<\right] &= V\delta f_b^0 + V\delta f_b^1 + \frac{K}{2}\left(1+\frac{I_d}{K}\right)\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}q^2|\vec{\pi}^<(\mathbf{q})|^2 \\ &+\frac{K}{2}\int\frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}}\pi_\alpha^<(\mathbf{q}_1)\pi_\alpha^<(\mathbf{q}_2)\pi_\beta^<(\mathbf{q}_3)\pi_\beta^<(-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_3) \\ &-\frac{\rho}{2}\int_0^{\Lambda/b}\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}|\vec{\pi}^<(\mathbf{q})|^2\times\left[1-(1-b^{-d})\right]+\mathcal{O}(T^2)\end{aligned} \tag{VII.19}$$

ifadesine eşittir. Kabalaştırmanın en önemli sonucu, elastik katsayının K'dan

$$\tilde{K} = K\left(1+\frac{I_d(b)}{K}\right) \tag{VII.20}$$

ifadesine değişmesidir.

Yeniden ölçeklemeden, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/b$, ve renormalize etmeden, $\vec{\pi}'(\mathbf{x}) = \vec{\pi}^<(\mathbf{x})/\zeta$ sonra, gerçek uzayda, renormalize edilmiş Hamiltoniyen

$$\begin{aligned}-\beta\mathcal{H}' &= -V\delta f_b^0 - V\delta f_b^2 - \frac{\tilde{K}b^{d-2}\zeta^2}{2}\int d^d\mathbf{x}'(\nabla'\pi')^2 \\ &- \frac{Kb^{d-2}\zeta^4}{2}\int d^d\mathbf{x}'(\vec{\pi}'(\mathbf{x}')\nabla\vec{\pi}'(\mathbf{x}'))^2+\frac{\rho\zeta^2}{2}\int d^d\mathbf{x}'\pi'(\mathbf{x}')^2+\mathcal{O}(T^2)\end{aligned} \tag{VII.21}$$

olarak verilir. Yeniden ölçeklenme çarpanı ζ'yi elde etmek için en kolay yöntem, spinlerin dönme simetrisinden faydalanmaktır. Kısa dalgaboylu modlar üzerinden ortalama alarak, spin

$$\begin{aligned}\left\langle\tilde{\vec{s}}\right\rangle_0^> &= \left\langle\left(\pi_1^< + \pi_1^>,\cdots,\sqrt{1-(\vec{\pi}^<+\vec{\pi}^>)^2}\right)\right\rangle_0^> \\ &= \left(\pi_1^<,\cdots,1-\frac{(\vec{\pi}^<)^2}{2}-\left\langle\frac{(\vec{\pi}^>)^2}{2}\right\rangle_0^>+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$= \left(1 - \left\langle \frac{(\vec{\pi}^{>})^2}{2} \right\rangle_0^{>} + \mathcal{O}(T^2)\right) \left(\pi_1^{<}, \cdots, \sqrt{1 - (\vec{\pi}^{<})^2}\right) \quad \text{(VII.22)}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\zeta = 1 - \left\langle \frac{(\vec{\pi}^{>})^2}{2} \right\rangle_0^{>} + \mathcal{O}(T^2) = 1 - \frac{(n-1)}{2} \frac{I_d(b)}{K} + \mathcal{O}(T^2) \quad \text{(VII.23)}$$

olarak, kabalaştırılmış spin uzunluğunu belirleriz. Denklem VII.21'deki renormalize edilmiş çiftlenim sabiti,

$$\begin{aligned} K' &= b^{d-2}\zeta^2 \tilde{K} \\ &= b^{d-2}\left[1 - \frac{n-1}{2K} I_d(b)\right]^2 K \left[1 + \frac{1}{K} I_d(b)\right] \\ &= b^{d-2} K \left[1 - \frac{n-2}{K} I_d(b) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K^2}\right)\right] \end{aligned} \quad \text{(VII.24)}$$

ifadesinden elde edilir. Çok küçük bir yeniden ölçekleme için, $b = (1 + \delta\ell)$, kabuk integralinden

$$I_d(b) = K_d \Lambda^{d-2} \delta\ell \quad \text{(VII.25)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, denklem VII.24'e karşılık gelen diferansiyel yineleme bağıntısı

$$\frac{dK}{d\ell} = (d-2)K - (n-2)K_d \Lambda^{d-2} \quad \text{(VII.26)}$$

olur. Alternatif olarak, ölçeklenme sıcaklığı $T = K^{-1}$

$$\frac{dT}{d\ell} = -\frac{1}{K^2}\frac{dK}{d\ell} = -(d-2)T + (n-2)K_d \Lambda^{d-2} T^2 \quad \text{(VII.27)}$$

olur. RG altında $\mathcal{U}_1$'deki iki terimin katsayılarının de evrimini takip etmemiz gerekiyor gibi görünebilir. Gerçekte, küresel simetri, dördüncü dereceden terimin katsayısının, bütün mertebelere kadar K ile aynı olmasını sağlar. İkisi arasındaki görünen fark $\mathcal{O}(T^2)$ mertebesindedir, ve bu mertebeden bütün terimler dahil edildiğinde ortadan kalkacaktır. $\mathcal{U}_1$'deki ikinci terim, sadece noktaların yoğunluğunu takip eder, ve banal renormalizasyonu vardır.

RG altındaki sıcaklığın davranışı $d = 2$'da büyük ölçüde değişir. $d < 2$ için, doğrusal akış her zaman sıfırdan uzağa doğrudur, ki düzenli fazın kararsız olduğu ve kırılan bir simetrinin olmadığı anlamına gelir. $d > 2$ için, küçük T'ler sıfıra geri akar, ki düzenli fazın kararlı olduğu anlamına gelir. $d = 2$ için akışlar, $n = 2$'de işaret değiştiren, ikinci mertebeden terimler tarafından kontrol edilir. $n > 2$ için, akış, yüksek sıcaklıklara doğrudur, ki Heisenberg ve daha yüksek spinli modellerin karasız olduğu anlamına gelir. $n = 2$ durumu belirsizdir, ve aslında, $dt/d\ell$'nin bütün mertebelerde sıfır olduğu gösterilebilir. Bu özel durum sonraki bölümde daha detaylı tartışılacaktır. $d > 2$ ve $n > 2$ için,

$$T^* = \frac{\epsilon}{(n-2)K_d \Lambda^{d-2}} = \frac{2\pi\epsilon}{(n-2)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{(VII.28)}$$

sabit noktasında bir faz geçişi vardır, burada $\epsilon = d - 2$, küçük parametre olarak kullanılmıştır. ϵ mertebesindeki yineleme bağıntısı

$$\frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + \frac{(n-2)}{2\pi} T^2 \tag{VII.29}$$

olarak verilir.

Sabit noktanın kararlılığı, doğrusallaştırılmış yineleme bağıntısı ile belirlenir:

$$\left.\frac{d\delta T}{d\ell}\right|_{T^*} = \left[-\epsilon + \frac{(n-2)}{\pi} T^*\right] \delta T = [-\epsilon + 2\epsilon]\,\delta T = \epsilon \delta T, \qquad \Longrightarrow \qquad y_t = \epsilon \tag{VII.30}$$

Termal özdeğer, ve elde edilen üsteller $\nu = 1/\epsilon$ ve $\alpha = 2 - (2+\epsilon)/\epsilon \approx -2/\epsilon$, bu mertebede n'den bağımsızdır.

Manyetik alınganlık, $-\vec{h} \cdot \int d^d\mathbf{x}\vec{s}(\mathbf{x})$ terimini Hamiltoniyen'e ekleyerek elde edilebilir. RG'nin etkisi altında, $h' = b^d \zeta h \equiv b^{y_h} h$ olur, burada

$$b^{y_h} = b^d \left[1 - \frac{n-1}{2K} I_d(b)\right] \tag{VII.31}$$

olarak tanımlanmıştır. Çok küçük bir yeniden ölçekleme için

$$1 + y_h \delta\ell = (1 + d\delta\ell)\left(1 - \frac{n-1}{2} T^* K_d \Lambda^{d-2} \delta\ell\right) \tag{VII.32}$$

ve

$$y_h = d - \frac{n-1}{2(n-2)}\epsilon = 1 + \frac{n-3}{2(n-2)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{VII.33}$$

elde ederiz, ki n'ye bağlıdır. Üstel özdeşlikleri kullanarak,

$$\eta = 2 + d - 2y_h = \frac{\epsilon}{n-2} \tag{VII.34}$$

buluruz. $4 - d$ açılımında, en düşük mertebede, η üsteli sıfırdır, ancak iki boyut civarında, ilk mertebede ortaya çıkar. Bu mertebede hesaplanan değerler çok tatmin edici değildir.