8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

VII.B XY Modelinde Topolojik Kusurlar

Önceki bölümde belirtildiği gibi, kırılmış sürekli simetrisi olan iki boyutlu sistemlerde, Goldstone modlarının termal uyarılmaları, kendiliğinden düzeni yok ederler. Doğrusal olmayan σ-modelinin RG incelemesi, n-bileşenli spinlerin geçiş sıcaklığının $\epsilon = (d-2) \to 0$ giderken $T^* = 2\pi\epsilon/(n-2)$ şeklinde sıfıra gittiğini doğrular. Ancak, aynı RG işlemi, $n=2$ için farklı bir davranış önerir gibi görünür. İki boyutlu XY modelinin ($n=2$) ilk garip davranış belirtisi, yüksek sıcaklık serisinin Stanley ve Kaplan tarafından 1966'da incelenmesinde göründü. Seri sonuçları, alınganlığın, sonlu sıcaklıkta ıraksadığını kuvvetle önerdi, ki bu simetri bozulmasının olmamasıyla görünüşte çelişir. Gerçekten de bu çelişki, Wigner'i simetri kırılması olmadan faz geçişi olasılığını incelemeye itmiştir. VI.E bölümde üç boyutlu İsing modelinin eşleği olarak tartışılan Z_2 ağ ayar teorisi, böyle bir olasılığı gerçekleştirir. Z_2 ayar teorisinin iki fazı, uygun bağdaşıklık fonksiyonunun (Wilson ilmeği) farklı fonksiyonel azalma şekli ile karakterize edilir. Benzer şekilde, biz de XY modelinin spin-spin bağdaşıklık fonksiyonlarının yüksek ve düşük sıcaklıklardaki asimptotik davranışlarını inceleyebiliriz.

Ağ üzerindeki XY modelinin bağdaşıklık fonksiyonlarının yüksek sıcaklık açılımı

$$\begin{aligned}\langle \vec{s}_{\mathbf{0}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle &= \langle \cos(\theta_{\mathbf{0}} - \theta_{\mathbf{r}}) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) \cos(\theta_{\mathbf{0}} - \theta_{\mathbf{r}}) e^{K \sum_{<i,j>} \cos(\theta_i - \theta_j)} \\ &= \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) \cos(\theta_{\mathbf{0}} - \theta_{\mathbf{r}}) \prod_{<i,j>} \left[1 + K \cos(\theta_i - \theta_j) + \mathcal{O}(K^2) \right]\end{aligned} \tag{VII.35}$$

Bölüşüm fonksiyonu için açılım da, $\cos(\theta_{\mathbf{0}} - \theta_{\mathbf{r}})$ çarpanı dışında benzerdir. K'da en düşük mertebede, ağ üzerindeki her bağ, ya bir ya da $K\cos(\theta_i - \theta_j)$ çarpanı getirir.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{VII.36}$$

olduğu için, bir *iç* konumundan tek bir bağ çıkan grafikler sıfır olur. Denklem VII.35'in payının sıfır olmaması için, $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{r}$'deki *dış* noktalardan başlayan bağlar olması gerekir. İki bağı olan *iç* noktalar üzerinden integal alınca

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_2 - \theta_3) = \frac{1}{2} \cos(\theta_1 - \theta_3) \tag{VII.37}$$

bulunur. Denklem VII.35'e katkı veren ilk diyagram, $\mathbf{0}$ noktasını $\mathbf{r}$ noktasına bağlayan (r uzunluğundaki) en kısa yoldur. Son noktalar üzerinden integral almak

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{0}} d\theta_{\mathbf{r}}}{(2\pi)^2} \cos(\theta_{\mathbf{0}} - \theta_{\mathbf{r}})^2 = \frac{1}{2} \tag{VII.38}$$

verdiği için, yol üzerindeki her bağ $(K/2)$ katkısı yapar. (Bölüşüm fonksiyonu için grafikleri oluştururken, her ilmek için fazladan bir 2 çarpanı vardır.) Dolayısıyla, en düşük mertebede,

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{0}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle \approx \left(\frac{K}{2}\right)^r = e^{-r/\xi}, \quad \xi \approx \frac{1}{\ln(2/K)} \text{ olmak üzere} \tag{VII.39}$$

olur ve düzensiz yüksek sıcaklık fazı, bağdaşıklıkların üstel azalmasıyla karakterize olur. (Bu açıkça, bütün spin sistemleri için geneldir.)

Düşük sıcaklıklarda, temel durum etrafındaki küçük salınımların masrafı ikinci dereceden açılımla elde edilir, ki süreklilik limitinde $K\int d^d\mathbf{x}(\nabla\theta)^2/2$ verir. Gaussiyan integralinin standart kuralları

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{0}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle = \left\langle \Re e^{i(\theta_{\mathbf{0}}-\theta_{\mathbf{r}})} \right\rangle = \Re \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle (\theta_{\mathbf{0}}-\theta_{\mathbf{r}})^2 \right\rangle\right] \tag{VII.40}$$

verir. İki boyutta, Gaussiyan salınımları

$$\frac{1}{2}\left\langle (\theta_{\mathbf{0}}-\theta_{\mathbf{r}})^2 \right\rangle = \frac{1}{2\pi K}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \tag{VII.41}$$

şeklinde büyür, burada a kısa mesafe sınırıdır (ağ aralığı mertebesinde). Dolayısıyla, düşük sıcaklıklarda,

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{0}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle \approx \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2\pi K}} \tag{VII.42}$$

yani, bağdaşıklıkların azalması *üstel*den ziyade, *cebirsel*dir. Bağdaşıklıkların kuvvet yasasıyla azalması, öz-benzerlik anlamına gelir (bağdaşıklık uzunluğu yok), ve genellikle kritik nokta ile ilişkilidir. Burada, açısal salınımların logaritmik büyümelerinden kaynaklanır, ki bu iki boyuta has bir durumdur.

Yüksek ve düşük sıcaklıklardaki bağdaşıklıkların farklı asimptotik azalmaları, sonlu sıcaklıklarda, iki rejimi ayıran bir faz geçişi olasılığını yaratır. Ancak, yukarıda ileri sürülen argümanlar, XY modeline özel değildir. Herhangi bir sürekli spin modeli, yüksek sıcaklılarda bağdaşıklıkların üstel azalmasını gösterirken, düşük sıcaklık Gaussiyan yaklaşıklığından kuvvet yasası azalmasını gösterir. Gaussiyan davranışının, sonlu sıcaklıklarda da olduğunu göstermek için, gradyant açılımındaki ek terimlerden etkilenmediğini ispatlamamız lazım. $\int d^d\mathbf{x}(\nabla\theta)^4$ gibi dördüncü dereceden terimler, Goldstone modları arasında etkileşimleri yaratırlar. Önceki bölümde, bu etkileşimlerin *önemliliği*, doğrusal olmayan σ-modelinde incelenmişti. $d=2$'deki sıfır sıcaklık sabit noktası bütün $n>2$'ler için kararsızdır, ancak görünüşte, $n=2$'de kararlıdır. ($n=2$'de sadece tek bir Goldstone mod dalı vardır. $n>2$'de farklı dallardaki Goldstone modları arasındaki etkileşimler, yüksek sıcaklıklara doğru kararsızlıklara yol açarlar.) XY modelinin düşük sıcaklık fazının, sonlu bir mıknatıslanmaya eşlik eden *gerçek uzun erimli düzene* karşıt *sanki-uzun erimli düzene* sahip olduğu söylenir.

Sanki-uzun erimli düzenli fazın düzensizlenmesinden sorumlu mekanizma nedir? RG incelemesi, gradyant açılımındaki daha yüksek dereceden terimlerin önemli olmadığını söylediği için, başka operatörlere bakmalıyız. Gradyant açılımı, temel durum etrafındaki *küçük* bozulmaların enerji maliyetini tasvir eder, ve düzenli duruma sürekli olarak değiştirilebilecek dizilimler için geçerlidir. Kosterlitz ve Thouless (1973), temel durumun basit bozulmaları olarak düşünülemeyecek *topolojik bozuklukların*, düzensizliğe yol açtığını öne sürdüler. Bir spinin yönelimini tanımlayan açı, 2π'nin tam katları kadar tanımsız olduğu için, kapalı bir yol etrafında dolanınca, bu açının $2\pi n$ kadar döndüğü spin dizilimleri kurmak mümkündür. n, yol tarafından kuşatılan *topolojik yük*tür. Kesikli doğasından dolayı, her tarafta düzgün olan duruma, ki yükü sıfırdır, sürekli olarak değişmesi mümkün değildir. (Daha genel olarak, topolojik bozukluklar, düzen parametresini tasvir eden tıknaz bir guruba sahip bütün modellerde vardır.)

Temel bozukluk, veya *girdap*, birim yüke sahiptir. Bozukluk merkezli bir çember etrafında tam dönünce, spinin yönelimi $\pm 2\pi$ kadar değişir. Eğer çemberin yarıçapı, r, yeterince büyükse, açının değişimleri küçük olacaktır, ve ağ yapısı ihmal edilebilir. Simetriden dolayı, $\nabla\theta$'nın değişmez genliği vardır, ve çember boyunca işaret eder (yani, çap vektörüne diktir). Bozulmanın genliği

$$\oint \nabla\theta \cdot d\vec{s} = \frac{d\theta}{ds}(2\pi r) = 2\pi n, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{n}{r} \tag{VII.43}$$

ifadesinden elde edilir. $\nabla\theta$ radyal bir vektör olduğundan,

$$\nabla\theta = n\left(-\frac{y}{r^2}, +\frac{x}{r^2}, 0\right) = -\frac{n}{r}\hat{r} \times \hat{z} = -n\nabla \times (\hat{z}\ln r) \tag{VII.44}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\hat{r}$ ve $\hat{z}$ sırasıyla, düzlemde ve one dik birim vektörlerdir, ve $\vec{a} \times \vec{b}$ iki vektörün vektörel çarpımını gösterir. Bu (süreklilik) yaklaştırması, girdabın merkezinin (çekirdeğinin) yakınında geçersizdir, ki orada ağ yapısı önemlidir.

n yüklü bir girdabın, enerji maliyetine, çekirdek bölgesinden geldiği gibi, merkezden uzakta, görece düzgün bozulmalardan da katkı gelir. Çekirdeğin içi ve dışı ayırımı keyfidir, ve basitleştirmek için, iki bölgeyi ayırmak için, a yarıçaplı bir çember kullanacağız, yani

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{E}_n &= \beta\mathcal{E}_n^0(a) + \frac{K}{2}\int_a d^2\mathbf{x}(\nabla\theta)^2 \\ &= \beta\mathcal{E}_n^0(a) + \frac{K}{2}\int_a^L (2\pi r dr)\left(\frac{n}{r}\right)^2 = \beta\mathcal{E}_n^0(a) + \pi K n^2 \ln\left(\frac{L}{a}\right) \end{aligned} \tag{VII.45}$$

Enerjiye asıl katkı, çekirdeğin dışındaki bölgeden gelir, ve sistemin boyutu L ile ıraksar. Bozuklukların yüksek enerji maliyetleri, sıfır sıcaklık yakınında, kendiliklerinden oluşmalarını engeller. Tek girdaplı bir dizilimin bölüşüm fonksiyonu

$$Z_1(n) \approx \left(\frac{L}{a}\right)^2 \exp\left[-\beta\mathcal{E}_n^0(a) - \pi K n^2 \ln\left(\frac{L}{a}\right)\right] = y_n^0(a)\left(\frac{L}{a}\right)^{2-\pi K n^2} \tag{VII.46}$$

olarak yazılabilir, burada $(L/a)^2$, L^2 büyüklüğündeki bir alanda, olası girdap konumlarının *dizilimsel entropi*sinden kaynaklanır. Girdabın enerjisi de entropisi de, $\ln L$ şeklinde büyür, ve serbest enerji biri ya da öteki tarafından belirlenir. Düşük sıcaklıklarda (büyük K), enerji belirleyicidir, ve Z_1, tek girdaplı dizilimlerin ağırlığının bir ölçüsü, yok olur. Yeterince yüksek sıcaklıklarda, $K < K_n = 2/(\pi n^2)$, entropinin katkısı, girdapların kendiliğinden oluşmasını teşvik edecek kadar büyüktür. Sıcaklığı arttırdıkça, ortaya çıkan ilk girdaplar $K_c = 2/\pi$'de $n = \pm 1$'e karşılık gelir. Bu noktadan sonra, sistemde bir sürü girdap vardır, ve denklem VII.46 artık faydalı değildir.

$K_c = 2/\pi$ çiftlenim sabiti, sistemin topolojik bozukluklara karşı kararlılığının *alt sınırı*dır. Bunun sebebi, daha büyük çiftlenimlerde, bozukluk çiftleri (çift kutuplar) ortaya çıkabilir. Aralarında $\pm d$ mesafesi olan iki yük düşünün. Çift kutubun merkezinden çok uzaktaki bozulmalar, $r \gg d$, bu iki girdabı üst üste koyarak elde edilebilir, ve

$$\nabla\theta = \nabla\theta_+ + \nabla\theta_- \approx \vec{d}\cdot\nabla\left(\frac{\hat{r}\times\hat{z}}{r}\right) \tag{VII.47}$$

ifadesi d/r^2 şeklinde azalır. Bu bozulmanın integrali *sonlu* bir enerji verir, ve dolayısıyla, çift kutuplar, her sıcaklıkta, uygun Boltzmann ağırlığıyla ortaya çıkarlar. Dolayısıyla, düşük sıcaklık fazı, sıkıca bağlı çift kutup gazı olarak hayal edilmelidir. Çiftkutupların sayısı (ve boyutu) sıcaklıkla artar, ve yüksek sıcaklık durumu bağlı olmayan girdap plazmasıdır. İki rejim arasındaki fark, $\ell \gg a$ boyutlarındaki büyük bir alandaki tipik net topolojik yükü, $Q(\ell)$ inceleyerek araştırılabilir. Ortalama yük her zaman sıfırken, düşük sıcaklık fazındaki salınımlar, sınırda duran çift kutuplardan kaynaklanır, yani $\langle Q(\ell)^2\rangle \propto \ell$ Yüksek sıcaklık durumunda, her işarete sahip yük, herhangi bir koşul olmaksızın oluşabilir, ve $\langle Q(\ell)^2\rangle \propto \ell^2$. (Wilson ilmeğinin, Z_2 ayar kuramındaki yüksek ve düşük sıcaklıklardaki farklı davranışına benzerliğe dikkat edin.)

İki rejim arasındaki geçişi tasvir etmek için, girdaplar arasındaki etkileşimi düzgün şekilde hesaplamalıyız. Bozulma alanı $\vec{u} \equiv \nabla\theta$, girdap kümesinin varlığında, bir sıvının hızına benzer. Girdapların olmadığı durumda, akış *potansiyel*dir, yani $\vec{u} = \vec{u}_0 = \nabla\phi$ ve $\nabla\times\vec{u}_0 = 0$. Topolojik yük, $\nabla\times\vec{u}$ ile, herhangi kapalı bir yol için

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{s} = \int (d^2\mathbf{x}\hat{z})\cdot\nabla\times\vec{u} \tag{VII.48}$$

olduğuna dikkat edilerek ilişkilendirilebilir, burada ikinci integral, yol tarafından çevrelenmiş alan üzerindendir. Sol taraf 2π'nin bir tam katı olduğundan dolayı

$$\nabla\times\vec{u} = 2\pi\hat{z}\sum_i n_i\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \tag{VII.49}$$

ki $\{n_i\}$ yüklü ve $\{bfx_i\}$ noktalarındaki bir gurup girdabı tasvir eder. Denklem VII.49'a çözüm, $\vec{u} = \vec{u}_0 - \nabla\times(\hat{z}\psi)$ alarak elde edilebilir:

$$\nabla\times\vec{u} = \hat{z}\nabla^2\psi, \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2\psi = 2\pi\sum_i n_i\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \tag{VII.50}$$

Dolayısıyla, ψ, $\{2\pi n_i\}$ yüklerinden kaynaklı bir potansiyel gibi davranır. Çözüm

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_i n_i \ln(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|) \tag{VII.51}$$

denklem VII.44'teki gibi, potansiyellerin üst üste eklenmesidir.

Dolayısıyla, herhangi iki boyutlu bir bozulma

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1 = \nabla\phi - \nabla\times(\hat{z}\psi) \tag{VII.52}$$

şeklinde yazılabilir, ve karşılık gelen "kinetik enerji", $\beta\mathcal{H} = K\int d^2\mathbf{x}|\vec{u}|^2/2$,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^2\mathbf{x}\left[(\nabla\phi)^2 - 2\nabla\phi\cdot\nabla\times(\hat{z}\psi) + (\nabla\times\hat{z}\psi)^2\right] \tag{VII.53}$$

şeklinde ayrıştırılabilir. İkinci terim yok olur, kısmi integrasyondan sonra

$$-\int d^2\mathbf{x}\nabla\phi\cdot\nabla\times(\hat{z}\psi) = \int d^2\mathbf{x}\phi\nabla\cdot(\nabla\times\hat{z}\psi) \tag{VII.54}$$

olur ve herhangi bir vektör için, $\nabla\cdot\nabla\times\vec{u} = 0$'dır. Denklem VII.53'teki üçüncü terim, $\nabla\psi = (\partial_x\psi, \partial_y\psi, 0)$, ve $\nabla\times(\hat{z}\psi) = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi, 0)$'ın aynı uzunlukta birbirlerine dik iki vektör oldukları kullanılarak sadeleştirilebilir. Dolayısıyla,

$$\beta\mathcal{H}_1 \equiv \frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}(\nabla\times\hat{z}\psi) = \frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}(\nabla\psi)^2 = -\frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}\psi\nabla^2\psi \tag{VII.55}$$

buradaki ikinci özdeşlik kısmi integrasyondan elde edilir. Denklemler VII.50 ve VII.51'den

$$\begin{aligned}\beta\mathcal{H}_1 &= -\frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}\left(\sum_i n_i\ln(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|)\right)\left(2\pi\sum_j n_j\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)\right)\\ &= -2\pi^2 K\sum_{i,j} n_i n_j C(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)\end{aligned} \tag{VII.56}$$

elde edilir, burada $C(\mathbf{x}) = \ln(|\mathbf{x}|)/2\pi$, iki boyutlu Coulomb potansiyelidir. Yukarıdaki sonuçta, $i = j$'de, logaritmanın küçük argümanlarındaki ıraksamasından dolayı, bir zorluk vardır. Bu, süreklilik hesaplarının kısa mesafede işe yaramamasından dolayıdır. Bir girdabın kendisiyle olan etkileşimi sadece $\beta\mathcal{E}_n^0$ çekirdek enerjisidir, ve

$$\beta\mathcal{H}_1 = \sum_i \beta\mathcal{E}^0_{n_i} - 4\pi^2 K\sum_{i<j} n_i n_j C(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j) \tag{VII.57}$$

Böylece, sıfır sıcaklık yakınındaki XY modelinin, dizilim uzayı, farklı topolojik kısımlara bölüşülebilir. Her kısımdaki serbestlik dereceleri, *spin dalgalarını* tasvir eden $\phi(\mathbf{x})$ alanına ek olarak $\{n_i\}$ yüklü, $\{\mathbf{x_i}\}$ konumlu *girdaplardır*. Modelin bölüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned}Z &= \prod_i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_i}{2\pi}\exp\left[K\sum_{<i,j>}\cos(\theta_i-\theta_j)\right]\\ &\propto \int\mathcal{D}\phi(\mathbf{x})e^{-\frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}(\nabla\phi)^2}\sum_{\{n_i\}}\int d^2\mathbf{x}_i e^{-\sum_i\beta\mathcal{E}^0_{n_i}+4\pi^2\sum_{i<j}n_i n_j C(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)}\\ &\equiv Z_{S.D.}Z_Q\end{aligned} \tag{VII.58}$$

olarak yaklaşık olarak hesaplanabilir, burada $Z_{S.D.}$, spin dalgalarının Gaussiyan bölüşüm fonksiyonu, ve Z_Q girdapların katkısıdır. İkincisi, iki boyutlu Coulomb etkileşimi ile etkileşen, yüklü parçacıklardan oluşan büyük kanonik gazı tasvir eder. Denklem VII.55'teki $\beta\mathcal{H}_1$ Hamiltoniyenini hesaplarken, kısmi integrasyon yaptık. İhmal edilen yüzey integrali, aslında, $(\sum_i n_i)\ln L$ şeklinde sistem boyutu ile büyür. Dolayısıyla, Z'nin hesabında sadece toplamda yüksüz olan dizilimler dahil edilmiştir. Problemi, sadece, düşük sıcaklıklarda, düşük enerjilerinden dolayı daha olası olan, $n_i = \pm 1$ olan temel uyarımları, göz önüne alarak daha da basitleştiririz, $y_0 \equiv \exp\left[-\beta \mathcal{E}^0_{\pm 1}\right]$ alarak,

$$Z_Q = \sum_{N=0}^{\infty} y_0^N \int \prod_{i=1}^{N} d^2\mathbf{x}_i \exp\left[4\pi^2 K \sum_{i<j} q_i q_j C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\right] \tag{VII.59}$$

burada $q_i = \pm 1$ ve $\sum_i q_i = 0$.