8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

VII.C Coulomb Gazı için Renormalizasyon Gurubu

Denklem VII.58'deki iki bölüşüm fonksiyonu birbirinden bağımsızdır ve ayrı ayrı hesaplanabilir. Gaussiyan bölüşüm fonksiyonu analitik olduğu için, XY modelindeki herhangi bir faz geçişi Coulomb gazından kaynaklanmalıdır. Daha önce kısaca belirtildiği gibi, düşük sıcaklık fazında, yükler, sadece sıkıca bağlı çiftkutup çiftlerinin küçük yoğunluğunda bulunur. Yüksek sıcaklık fazında, çiftkutuplar, ayrışarak plazma oluşturur. İki faz, birbirlerinde X uzaklığında, iki *harici* yük arasındaki etkileşimi inceleyerek ayrıştırılabilinir. Ortamda herhangi bir *dahili* yükün yokluğunda ($y_0 = 0$ için), iki yük *çıplak* Coulomb etkileşmesi ile etkileşirler $C(X)$. Küçük y_0 için, sonlu bir iç yük yoğunluğu, harici yükleri kısmen perdeler, ve test yükleri arasındaki etkileşimi $C(X)/\epsilon$'a azaltır, burada ϵ etkin *dielektrik* sabitidir. Yeterince büyük y_0'da, *yalıtkan*'dan *metal*'e bir faz geçişi vardır. Metalik (plazma) fazında, harici yükler tamamen perdelenmiştir, ve etkin etkileşmeleri üstel olarak azalır.

Yukarıdaki resmi nicel hale getirebilmek için, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}'$'daki iki *harici* yükün arasındaki etkileşimleri, y_0 kaçarlığında tedirgeme ile hesaplayacağız. En düşük mertebede, iki *dahili* yük ($\mathbf{y}$ ve $\mathbf{y}'$'ünde) içeren konfigürasyonlara ihtiyacımız var ve

$$
\begin{aligned}
& e^{-\beta\mathcal{V}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = e^{-4\pi^2KC(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \times \\
& \frac{\left[1 + y_0^2 \int d^2\mathbf{y} d^2\mathbf{y}' e^{-4\pi^2KC(\mathbf{y}-\mathbf{y}') + 4\pi^2K[C(\mathbf{x}-\mathbf{y})-C(\mathbf{x}-\mathbf{y}')-C(\mathbf{y}'-\mathbf{x})+C(\mathbf{x}'-\mathbf{y}')]} + \mathcal{O}(y_0^4)\right]}{\left[1 + y_0^2 \int d^2\mathbf{y} d^2\mathbf{y}' e^{-4\pi^2KC(\mathbf{y}-\mathbf{y}')} + \mathcal{O}(y_0^4)\right]} \\
& = e^{-4\pi^2KC(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\left[1 + y_0^2\int d^2\mathbf{y} d^2\mathbf{y}' e^{-4\pi^2KC(\mathbf{y}-\mathbf{y}')}\left(e^{4\pi^2KD(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{y},\mathbf{y}')} - 1\right) + \mathcal{O}(y_0^4)\right]
\end{aligned}
\tag{VII.60}
$$

burada $D(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{y},\mathbf{y}')$, dahili ve harici çiftkutuplar *arasındaki* etkileşimdir. Dahili yükler arasındaki doğrudan etkileşim $\mathbf{r} = \mathbf{y}' - \mathbf{y}$ aralığını küçük tutma eğilimindedir. $\mathbf{R} = (\mathbf{y}+\mathbf{y}')/2$ kütle merkezini kullanırsak, $\mathbf{y} = \mathbf{R} - \mathbf{r}/2$ ve $\mathbf{y}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}/2$ değişkenlerini kullanabiliriz, ve küçük $\mathbf{r}$'deki çiftkutup-çiftkutup etkileşmesini açarsak

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{y},\mathbf{y}') &= C\left(\mathbf{x}-\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right) - C\left(\mathbf{x}-\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right) - C\left(\mathbf{x}'-\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}\right) + C\left(\mathbf{x}'-\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \\
&= -\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}C(\mathbf{x}-\mathbf{R}) + \mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}) + \mathcal{O}(r^3)
\end{aligned}
\tag{VII.61}
$$

Aynı mertebede,

$$
\begin{aligned}
e^{4\pi^2KD(\mathbf{x},\mathbf{x}';\mathbf{y},\mathbf{y}')} - 1 &= -4\pi^2K\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R}) - C(\mathbf{x}'-\mathbf{R})) \\
&+ 8\pi^4K^2\left[\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R}) - C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\right] + \mathcal{O}(r^3)
\end{aligned}
\tag{VII.62}
$$

$\int d^2\mathbf{y}d^2\mathbf{y}' \to \int d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{R}$ değişken değişiminden sonra, etkin etkileşim

$$
\begin{aligned}
& e^{-\beta\mathcal{V}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = e^{-4\pi^2KC(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\left\{\left[1 + y_0^2\int d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{R}e^{-4\pi^2KC(\mathbf{r})}\times\right.\right. \\
& \left(-4\pi^2\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R}) - C(\mathbf{x}'-\mathbf{R})) + 8\pi^4K^2\left[\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R}) - C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\right]^2\right. \\
& \left.\left.\left. +\mathcal{O}(r^3)\right) + \mathcal{O}(y_0^4)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{VII.63}
$$

$d^2\mathbf{r}$ daki açısal integralleri takiben, $\mathbf{r}$'da doğrusal olan terim yok olurken, $(\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{R}}C)^2$'nin açısal ortalaması $r^2|\nabla_{\mathbf{R}}C|^2/2$ olur. Dolayısıyla, denklem VII.63,

$$e^{-\beta\mathcal{V}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = e^{-4\pi^2 KC(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\times \left[1+y_0^2\int(2\pi r dr)e^{-4\pi^2 KC(r)}8\pi^4K^2\frac{r^2}{2}\int d^2\mathbf{R}\left(\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R})-C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\right)^2+\mathcal{O}(r^4)\right] \tag{VII.64}$$

Kalan integral, kısmi integrasyonla kesaplanabilir

$$\begin{aligned}&\int d^2\mathbf{R}\left[\nabla_{\mathbf{R}}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R})-C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\right]^2\\ =&\ -\int d^2\mathbf{R}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R})-C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\left(\nabla^2C(\mathbf{x}-\mathbf{R})-\nabla^2C(\mathbf{x}'-\mathbf{R})\right)\\ =&\ -\int d^2\mathbf{R}(C(\mathbf{x}-\mathbf{R})-C(\mathbf{x}'-\mathbf{R}))\left(\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{R})-\delta^2(\mathbf{x}'-\mathbf{R})\right)\\ &=2C(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-2C(0)\end{aligned} \tag{VII.65}$$

Kısa mesafe ıraksaması, $C(x)\to\ln(x/a)/2\pi$ ile, uygun bir sınırın içine yedirilebilir, ve

$$e^{-\beta\mathcal{V}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = e^{-4\pi^2 KC(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\left[1+16\pi^5K^2y_0^2C(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\int dr d^3 e^{-2\pi K\ln(r/a)}+\mathcal{O}(y_0^4)\right] \tag{VII.66}$$

İkinci mertebe terim üstelleştirilerek,

$$K_{\text{etkin}} = K-4\pi^3K^2y_0^2a^{2\pi K}\int_a^\infty dr r^{3-2\pi K}+\mathcal{O}(y_0^4) \tag{VII.67}$$

ile $\beta\mathcal{V}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\equiv 4\pi^2K_{\text{etkin}}C(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ etkin etkileşimi elde edilir.

Bu şekilde, ortamın dielektrik sabitini, $\epsilon = K/K_{\text{etkin}}$, y_0^2 mertebesine kadar tedirgemeyle hesapladık. Ancak, tedirgeme ile elde edilen düzeltme, r integrali büyük r'lerda yakınsarsa küçüktür. Tedirgeme kuramının $K<K_c=2/\pi$'de geçerliliğini yitirmesi, tam olarak, tecrit edilmiş bir girdabın serbest enerjisinin işaret değiştirdiği noktada olur. Tedirgeme kuramının bu geçerliliğini yitirmesi, Landau-Ginzburg modelinde $d<4$ için olanla benzer. O problemden kazanılan deneyimi kullanarak, tedirgeme serisini, K ve y_0 parametreleri için renormalizasyon gurubu olarak yeniden düzenleyeceğiz.

Coulomb gazı için RG oluşturmak için, denklem VII.59'daki bölüşüm fonksiyonunun iki parametre (K, y_0) içerdiğine, ve açıkça yazılmayan, girdaplar arası en küçük mesafe ile ilgili bir a sınırı olduğuna dikkat edin. Daha önce de bahsedildiği gibi, girdabın iç ve dış bölgelerinin ayırımı keyfidir. Çekirdek boyutunu ba'ya arttırmak, sadece çekirdek enerjisini, dolayısıyla y_0'ı değil, aynı zamanda K etkileşme parametresini de değiştirir. İkincisi, iki çiftkutup arasındaki mesafenin a ile ba arasındaki değişiminin, ortamın dielektrik özelliklerini değiştirmesinden kaynaklanmaktadır. Kaçarlıktaki değişim, denklem VII.46'da a'yı ba ile değiştirerek elde edilir:

$$\tilde{y_0}(ba) = b^{2-\pi K}y_0(a) \tag{VII.68}$$

Her boyuttaki çiftkutuplardan dolayı değiştirilmiş Coulomb etkileşmesi denklem VII.67'de verilmiştir. (y_0^2 mertebesine kadar tedirgeme hesabı, sadece çiftkutupları dahil eder.) a ve ba aralığında boyu olan çiftkutuplardan

$$\tilde{K} = K\left[1 - (2\pi^2 K)\int_a^{ba}(2\pi r dr)\left(y_0^2 e^{-4\pi^2 KC(r)}\right) r^2\right] \tag{VII.69}$$

katkısını elde ederiz, burada, terimler, dielektrik sabitin standart hesabı ile olan benzerliği ortaya çıkaracak şekilde guruplanmıştır. (Bir çiftkutup yaratma olasılığı, kutuplaşabilirliği ile çarpılmıştır; $\beta = (k_b T)^{-1}$'in işlevi $2\pi^2 K$ tarafından görülmektedir.

Çok küçük $b = e^{\ell} \approx 1 + \ell$ seçerek, denklem VII.69

$$\frac{dK}{d\ell} = -4\pi^3 K^2 a^4 y_0^2 + \mathcal{O}(y_0^4) \tag{VII.70}$$

denklemine dönüştürülür. Kaçarlığı da dahil edersek, yineleme bağıntılarını

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dK^{-1}}{d\ell} & = & 4\pi^3 a^4 y_0^4 + \mathcal{O}(y_0^4) \\ \frac{dy_0}{d\ell} & = & (2 - \pi K) y_0 + \mathcal{O}(y_0^3) \end{array}\right. \tag{VII.71}$$

olarak elde ederiz ki ilk olarak 1975'te Kosterlitz tarafından elde edilmiştir. $dK^{-1}/d\ell \geq 0$ iken, y_0 için yineleme bağıntısı $K_c^{-1} = \pi/2$'de işaret değiştirir. K^{-1}'in daha küçük değerlerinde (yüksek sıcaklıklar), y_0 önemliyken, daha küçük sıcaklıklarda önemsizdir. Dolayısıyla, RG akışı, parametre uzayını iki bölgeye ayırır. Düşük sıcaklıklar ve küçük y_0, akışlar $y_0 = 0$ ve $K_{\text{etkin}} \geq 2/\pi$ olan *sabit doğru*da biterler. Bu, sadece sonlu boyuttaki çiftkutupların olduğu yalıtkan fazdır. (Dolayısıyla kabalaştırma altında y_0 yok olur.) Etkin Coulomb etkileşimin kuvveti, akışların, sabit doğru üzerinde bittikleri nokta tarafından verilir. Sabit doğruda bitmeyen akışlar, daha büyük K^{-1} ve y_0 değerlerine giderler, ki burada tedirgeme kuramı kullanılamaz. Bu, çokça girdap içeren yüksek sıcaklık fazının işaretidir. Faz diyagramının iki bölgesini ayıran kritik yörünge, $(K_c^{-1} = \pi/2, y_0 = 0)$'daki sabit noktaya akar. Geçişteki kritik davranışı bulmak için, yineleme bağıntılarını, $x = K^{-1} - \pi/2$ ve $y = y_0 a^2$ seçerek bu nokta civarında açın. En düşük mertebede, denklem VII.71

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{d\ell} & = & 4\pi^3 y^2 + \mathcal{O}(xy^2, y^4) \\ \frac{dy}{d\ell} & = & \frac{4}{\pi} xy + \mathcal{O}(x^2 y, y^3) \end{array}\right. \tag{VII.72}$$

ifadesine sadeleşir. Yineleme bağıntısı, sabit nokta civarında, özünden *doğrusal değildir*. Bu, bu zamana kadar karşılaştığımız doğrusal yineleme bağıntılarından farklıdır, ve elde edilen kritik davranış da standart değildir. İlk olarak, VII.72 denklemlerinin

$$\frac{dx^2}{d\ell} = 8\pi^3 y^2 x = \pi^4 \frac{dy^2}{d\ell}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\ell}(x^2 - \pi^4 y^2) = 0, \quad \Rightarrow \quad x^2 - \pi^4 y^2 = c \tag{VII.73}$$

alamına geldiğine dikkat edin. Dolayısıyla, RG akışları, farklı c değerleri ile karakterize olan hiperboller boyunca hareket ederler. $c > 0$ için, hiperbolün odağı y-ekseni üzerindedir, ve akışlar $(x, y) \to \infty$'a giderler. $c < 0$ olan hiperbollerin odakları x-ekseni üzerindedir, ve

$y \geq 0$ yarı düzleminde iki dalı vardır: $x < 0$'daki dallar, sabit doğruya akarlarken, $x > 0$ kadranındakiler sonsuza akar. Sıfıra ve sonsuz y'ye akan akışları ayıran kritik yörünge, $c = 0$'a karşılık gelir, yani $x_c = -\pi^2 y_c$. Bundan dolayı, küçük fakat sonlu bir y_0 kaçarlığı, kritik sıcaklığı, $K_c^{-1} = \pi/2 - \pi^2 y_0 a^2 + \mathcal{O}(y_0^2)$'ye indirir.

Orijinal XY modeli cinsinden, düşük sıcaklık fazı, $K_{\text{etkin}} = \lim_{\ell\to\infty} K(\ell) \geq 2/\pi$ olan sabit noktalardan oluşan bir doğru ile karakterize olur. Bir sabit noktada, bağdaşıklık uzunluğu yoktur, ve gerçekten, faz uzayındaki bağdaşıklıklar bir güç yasası ile azalırlar, $\langle \cos(\theta_{\mathbf{r}} - \cos\theta_{\mathbf{0}})\rangle \sim 1/r^{\eta}$, burada $\eta = 1/(2\pi K_{\text{etkin}}) \leq 1/4$. Düşük sıcaklık fazında, c parametresi negatif olduğu, ve kritik noktada sıfır olduğu için, geçişe yakın bölgede, $c = -b^2(T_c - T)$ olarak belirleyebiliriz. Başka bir deyişle, başlangıç noktalarının yörüngesi $(x_0(T), y_0(T))$ doğrusunu takip eder. Elde edilen $c = x_0^2 - \pi^4 y_0^2 \propto (T_c - T)$, faz geçişine yakınlığın doğrusal bir ölçüsüdür. Renormalizasyon altında, böyle yörüngeler, $y = 0$ ve $x = -b\sqrt{T_c - T}$ noktasındaki bir sabit noktaya akarlar. Dolayısıyla, geçişin civarında, etkin etkileşme parametresinin

$$K_{\text{etkin}} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\lim_{\ell\to\infty} x(\ell) = \frac{2}{\pi} + \frac{4b}{\pi^2}\sqrt{T_c - T} \qquad \text{(VII.74)}$$

bir karekök tekilliği vardır. *Sertlik* K_{etkin}, superakışkan filmler üzerindeki deneylerde ölçülebilir. Süperakışkan fazda, düzen parametresi, yoğuşma dalga fonksiyonudur $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{\Psi} e^{i\theta}$. θ fazındaki değişimler, süperakışkan kinetik enerjiyi verir

$$\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\psi^* \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\right)\psi = \frac{\hbar^2\mathbf{\Psi}^2}{2m}\int d^d\mathbf{x}(\nabla\theta)^2 \qquad \text{(VII.75)}$$

burada m, parçacıkların (helyum 4) kütlesidir. Karşılık gelen XY modelinin sertliği $K = \hbar^2\rho_s/(2mk_BT)$ olur, burada $\rho_s = \mathbf{\Psi}^2$, süperakışkan yoğunluğudur. ρ_s yoğunluğu, burulma salınıcısının eylemsizlik momentindeki değişiklik incelenerek ölçülür; süperakışkan kısım, $\rho_s m$, sürtünme hissetmez dolayısıyla, salınmaz. Bishop ve Reppy (1978), ρ_s'i burgusal bir silindirin etrafına sarılmış çeşitli süperakışkanları (farklı, helyum 3 yoğunluğu, vb.) incelediler. Etkin sertliği, sıcaklığın bir fonksiyonu olarak oluşturdular, ve bütün filmler için, faz geçişinde, $2/\pi$'lik *evrensel sıçrayış* yaptıklarını buldular. $T < T_c$ için, K'nın davranışı, bir karekök tekilliği ile tutarlıdır.

Yüksek sıcaklık fazında, bağdaşıklıklar üstel olarak azalırlar. Bağdaşıklık uzunluğu ξ, T_c'de nasıl ıraksar? $c = x^2 - \pi^4 y^2 = b^2(T - T_c)$ parametresi, şimdi, hiperbol yörüngenin tamamında pozitiftir. x için yineleme bağıntısının

$$\frac{dx}{d\ell} = 4\pi^3 y^2 = \frac{4}{\pi}\left(x^2 + b^2(T - T_v)\right) \qquad \text{(VII.76)}$$

integrali alınarak

$$\frac{dx}{x^2 + b^2(T - T_c)} = \frac{4}{\pi}d\ell, \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b\sqrt{T - T_c}}\arctan\left(\frac{x}{b\sqrt{T - T_c}}\right) = \frac{4}{\pi}\ell \qquad \text{(VII.77)}$$

elde edilir. Eğer $x_0 \propto (T - T_c) \ll 1$ ise, yukarıdaki denklemin sol tarafındaki başlangıç noktasının katkısı dışarıda bırakılabilir. İntegral alma, $x(\ell) \sim y(\ell) \sim 1$'de durdurulmalıdır, çünkü bu noktanın ötesinde tedirgeme hesabı artık geçerli değildir. Bu

$$\ell^* \approx \frac{\pi}{4b\sqrt{T-T_c}}\frac{\pi}{2} \tag{VII.78}$$

değerinde olur, burada $\arctan(1/b\sqrt{T-T_c}) \approx \arctan(\infty) = \pi/2$ ifadesini kullandık. Elde edilen bağdaşıklık uzunluğu,

$$\xi \approx ae^{\ell^*} \approx a\exp\left(\frac{\pi^2}{8b\sqrt{T-T_c}}\right) \tag{VII.79}$$

olur. Buraya kadar karşılaşılan geçişlerden farklı olarak, bağdaşıklık uzunluğunun ıraksaması, kuvvet yasası ile olmaz. Bu, yineleme bağıntılarının, sabit nokta civarında doğrusal olmamasının bir sonucudur.

ξ'den daha küçük mesafelerde, girdaplar bağlı çiftler şeklinde ortaya çıkarken, daha uzun aralarda, bir veya diğer işaretli girdaplarda fazlalık olabilir. Uzun mesafelerdeki girdapların etkileşmeleri, polielektrolitlerin Debye-Hückel kuramından elde edilebilir. Bu kurama göre, serbest yükler birbirlerini perdeleyerek, perdelenmiş Coulomb etkileşmesine yol açarlar, $\exp(-r/\xi)\,C(r)$. Geçişe yüksek sıcaklık tarafından yaklaşırsak, serbest enerjinin tekil kısmının

$$f_{\text{tekil}} \propto \xi^{-2} \propto \exp\left(-\frac{\pi^2}{4b\sqrt{T-T_c}}\right) \tag{VII.80}$$

sadece *temel tekilliği* vardır. Sonlu T_c'de bu fonksiyonun bütün türevleri sonludur. Dolayısıyla, tahmin edilen ısı sığası, geçişte oldukça düzgündür. RG'ye dayanan sayısal sonuçlar (Berker ve Nelson), ısı sığasında, çiftkutupların çoğunun çözüldüğü noktaya karşılık gelen, T_c'den daha yüksek bir sıcaklıkta, düzgün bir zirve gösteriyorlar.

Gırdap çözülmesinin Kosterlitz-Thouless resmi, süperiletkenlik ve süperakışkan filmler, ince sıvı kristaller, Josephson eklem dizileri, helyum filmlerinin üzerindeki elektronlar, vb. gibi pek çok iki boyutlu sistemde uygulama bulmuştur. Belki de daha önemlisi, topolojik bozukluk fikrinin, pek çok sistemi anlamada pek çok etkisi olmuştur. Bir sonraki bölümde geliştirilen iki boyutta erimenin kuramı böyle bir örnektir.