8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

II.C Kendiliğinden Simetri Kırılması ve Goldstone Modları

Sıfır alanda, $\vec{h} = 0$, mikroskopik Hamiltoniyen'in tam dönme simetrisi olduğu halde, düşük sıcaklık fazının yoktur. Net mıknatıslanma $\vec{M}$ için n-uzayında belirli bir yön seçildiği için, *kendiliğinden kırılan simetri* vardır ve buna tekabül sistemde *uzun menzilli* bir düzen oluşmuştur. Orijinal simetri, yaygın olarak hala vardır, şöyle ki, eğer bütün yerel mıknatıslanmalar $\vec{m}(\mathbf{x})$ beraber dönderilirlerse (yani $\vec{m}(\mathbf{x}) \mapsto \Re\vec{m}(\mathbf{x})$), enerji değişmez. Böyle bir dönme, düzenli bir durumu, başka düzenli bir duruma dönüştürür. Eğer düzenli bir dönüşümün enerji maliyeti yoksa, süreklilikten dolayı, uzayda yavaş yavaş değişen bir dönme (yani $\vec{m}(\mathbf{x}) \mapsto \Re(\mathbf{x})\vec{m}(\mathbf{x})$, $\Re(\mathbf{x})$ sadece uzun dalgaboylu değişimleri içerir) çok az enerjiye mal olur. Bu tür düşük enerji uyarımlara *Goldstone Mod*ları denir. Bütün kırık *sürekli simetri* içeren sistemlerde bulunurlar. Kesikli bir simetri kırıldığında, Goldstone modları olmaz, çünkü bir durumdan, denk başka bir duruma yavaşça değişen dönmeler yaratılamaz. Fononlar, kristal yapısından kaynaklı öteleme ve dönme simetrilerinin kırılmasına karşılık gelen Goldstone modlarına örnektir.

Süperakışkanlık bağlamında, Goldstone modlarının kaynağını ve sonuçlarını araştıralım. Bose yoğuşmasına benzer şekilde, süperakışkan fazda da, tek bir kuantum temel durumunum makroskopik doluluğu vardır. Düzen parametresi

$$\psi(\mathbf{x}) \equiv \psi_{\Re} + i\psi_{\Im} \equiv |\psi(\mathbf{x})|e^{i\theta(\mathbf{x})} \qquad \text{(II.11)}$$

$\mathbf{x}$ civarındaki gerçek dalga fonksiyonunun, temel durum bileşenidir (örtüşme). Dalga fonksiyonunun fazı gözlemlenebilen bir nicelik değildir ve herhangi bir fiziksel olarak ölçülebilen olasılıkta görünmemelidir. Mesela, etkin kabalaştırılmış Hamiltoniyen, bir açılım olarak

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{t}{2}|\psi|^2 + u|\psi|^4 \ldots\right] \qquad \text{(II.12)}$$

olarak yazılabilir. Açıkça, denklem II.12, Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'inin $n = 2$ ($\vec{m} \equiv (\psi_{\Re}, \psi_{\Im})$) durumuna denktir. Süperakışkan geçişi, $t < 0$ için, sonlu bir ψ değerinin oluşmasıyla göze çarpar. Hamiltoniyen'i minimize etmek, ψ'in genliğini belirler, ancak fazını belirlemez. Şimdi, fazı yavaşça değişen bir durum düşünün, yani $\psi(\mathbf{x}) = \bar{\psi}e^{i\theta(\mathbf{x})}$. Bu formu Hamiltoniyen'e yerleştirince, enerji

$$\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + \frac{\bar{K}}{2}\int d^d\mathbf{x}(\nabla\theta)^2 \qquad \text{(II.13)}$$

olarak elde edilir; burada $\bar{K} = K\bar{\psi}^2$ olmak üzere. Öteleme simetrisinden faydalanarak, denklem II.13 (V hacminde) $\theta(\mathbf{x}) = \sum_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\theta_{\mathbf{q}}/\sqrt{V}$ yazılarak, birbirinden bağımsız modlara ayrıştırılabilir:

$$\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + \frac{\bar{K}}{2}\sum_{\mathbf{q}} q^2|\theta(\mathbf{q})|^2. \qquad \text{(II.14)}$$

Açıkça, uzun dalga boylu Goldstone modları çok az enerjiye mal olurlar ve termal salınımlarla kolayca uyarılırlar.

Düzen parametresinin genliğinin gerçekten düzgün olduğunu varsayarsak, belli bir dizilimin olasılığı

$$\mathcal{P}[\theta(\mathbf{x})] \propto \exp\left[-\frac{\bar{K}}{2} d^d\mathbf{x}(\nabla\theta)^2\right] \quad \text{(II.15)}$$

ile verilir. Alternatif olarak, Fourier bileşenleri cinsinden

$$\mathcal{P}[\theta(\mathbf{q})] \propto \exp\left[-\frac{\bar{K}}{2}\sum_{\mathbf{q}} q^2|\theta(\mathbf{q})|^2\right] \propto \prod_{\mathbf{q}} p(\theta_{\mathbf{q}}). \quad \text{(II.16)}$$

Her $\theta_{\mathbf{q}}$ modu, sıfır ortalamalı ve

$$\langle\theta_{\mathbf{q}}\theta_{\mathbf{q}'}\rangle = \frac{\delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}}{\bar{K}q^2} \quad \text{(II.17)}$$

olan Gaussiyan dağılımlı, *bağımsız* bir rastgele değişkendir. [1] Denklem II.17'den, $\theta(\mathbf{x})$ fazının reel uzaydaki bağdaşıklıklarını hesaplayabiliriz. Açıkça, simetriden dolayı, $\langle\theta(\mathbf{x})\rangle = 0$, ve

$$\langle\theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x}')\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'}\langle\theta_{\mathbf{q}}\theta_{\mathbf{q}'}\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\bar{K}q^2} \quad \text{(II.18)}$$

Süreklilik limitinde toplam, integral olarak yazılabilir ($\sum_{\mathbf{q}} \mapsto V\int d^d\mathbf{q}/(2\pi)^d$) ve

$$\langle\theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x}')\rangle = \int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\bar{K}q^2} = -\frac{C_d(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\bar{K}}. \quad \text{(II.19)}$$

$$C_d(\mathbf{x}) = -\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{q^2} \quad \text{(II.20)}$$

[1] Reel bir alanın $\theta(\mathbf{x})$ Fourier dönüşümü karmaşıktır $\theta_{\mathbf{q}} = \theta_{\mathbf{q},\Re} + i\theta_{\mathbf{q},\Im}$. Ancak, $\theta_{-\mathbf{q}} = \theta^*_{\mathbf{q}} = \theta_{\mathbf{q},\Re} - i\theta_{\mathbf{q},\Im}$ koşulundan dolayı, alanların sayısı ikiye katlanmaz. Gaussiyan, öteleme değişmez ağırlığın genel hali

$$\mathcal{P}[\{\theta_{\mathbf{q}}\}] \propto \prod \exp\left[-\frac{K(q)}{2}\theta_{\mathbf{q}}\theta_{-\mathbf{q}}\right] = \prod_{\mathbf{q}>\mathbf{0}}\exp\left[-\frac{2K(q)}{2}(\theta^2_{\mathbf{q},\Re}+\theta^2_{\mathbf{q},\Im})\right]$$

olarak gösterilebilir. İlk çarpım, bütün $\mathbf{q}$ değerleri üzerinden olmakla beraber, ikincisi sadece yarı uzayla sınırlandırılmıştır. Farklı $\mathbf{q}$ değerleri için açıkça çapraz bağdaşıklık yoktur ve Gaussiyan değişkeden

$$\langle\theta^2_{\mathbf{q},\Re}\rangle = \langle\theta^2_{\mathbf{q},\Im}\rangle = \frac{1}{2K(q)}$$

doğrudan

$$\langle\theta_{\mathbf{q}}\theta_{\pm\mathbf{q}}\rangle = \langle\theta^2_{\mathbf{q},\Re}\rangle \mp \langle\theta^2_{\mathbf{q},\Im}\rangle = \frac{1\mp 1}{2K(q)}$$

sonuçlarını oluşturabiliriz.

fonksiyonu, d boyutlu uzayda, merkezdeki birim yükün yarattığı Coulomb potansiyelidir, çünkü

$$\nabla^2 C_d(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{q^2}{q^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \delta^d(\mathbf{x}) \tag{II.21}$$

denkleminin çözümüdür. Gauss'un teoremini kullanarak:

$$\int d^d x \nabla^2 C_d = \oint dS \cdot \nabla C_d \ ,$$

kolayca bir çözüm bulabiliriz. Küresel simetrik bir çözüm için, $\nabla C_d = (dC_d/dx)\hat{x}$, yukarıdaki denklem

$$1 = S_d x^{d-1}\frac{dC_d}{dx}, \tag{II.22}$$

halini alır, burada

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}, \tag{II.23}$$

d boyuttaki toplam katı açıdır (birim kürenin alanı). Dolayısıyla

$$\frac{dC_d}{dx} = \frac{1}{S_d x^{d-1}}, \quad \Longrightarrow \quad C_d(x) = \frac{x^{2-d}}{(2-d)S_d} + c_0, \tag{II.24}$$

burada c_0 integrasyon sabitidir.

$C_d(x)$'in uzun mesafe davanışı $d = 2$'de çarpıcı şekilde değişir:

$$\lim_{x\to\infty} C_d(x) = \begin{cases} c_0 & d > 2 \\ \frac{x^{2-d}}{(2-d)S_d} & d < 2 \\ \frac{\ln(x)}{2\pi} & d = 2 \end{cases} \ . \tag{II.25}$$

Integrasyon sabiti, $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$'da sıfıra giden

$$\langle [\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}')]^2 \rangle = 2\langle \theta(\mathbf{x})^2 \rangle - 2\langle \theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x}') \rangle, \tag{II.26}$$

ifadesine bakarak elde edilebilir. Dolayısıyla,

$$\langle [\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}')]^2 \rangle = \frac{2(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2-d} - a^{2-d})}{\bar{K}(2-d)S_d} \tag{II.27}$$

burada a, ağ aralığı mertebesindedir.

$d > 2$ için, faz salınımları sonludur, bununla beraber, $d \le 2$ için asimptotik olarak büyürler. Faz 2π ile sınırlı olduğu için, fazda uzun erimli düzenin yok olduğu anlamına gelir. Bu sonuç, faz salınımlarının, iki nokta bağdaşıklık fonksiyonuna etkisine bakarsak, daha açık hale gelir:

$$\langle \psi(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{0}) \rangle = \bar{\psi}^2 \langle e^{i[\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{0})]} \rangle. \tag{II.28}$$

(Genlik salınımları ihmal edildiğinden, aslında *enine* bağdaşıklık fonksiyonunu inceliyoruz.)

Daha sonra, herhangi Gaussian dağılıma sahip değişkenler için

$$\langle \exp(\alpha\theta) \rangle = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\langle\theta^2\rangle\right)$$

olduğunu ispatlayacağız. Bu sonucu kabul edersek,

$$\langle \psi(\mathbf{x})\psi^*(0) \rangle = \bar{\psi}^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\langle[\theta(\mathbf{x})-\theta(\mathbf{0})]^2\rangle\right] = \bar{\psi}^2 \exp\left[-\frac{x^{2-d}-a^{2-d}}{\bar{K}(2-d)S_d}\right] , \quad \text{(II.29)}$$

sonucunu elde ederiz ve asimptotik olarak

$$\lim_{x\to\infty} \langle \psi(\mathbf{x})\psi^*(\mathbf{0}) \rangle = \begin{cases} \bar{\psi}'^2 & \text{for } d > 2 \\ 0 & \text{for } d \le 2 \end{cases} . \quad \text{(II.30)}$$

Düzen parametresi $\overline{\psi}$ için yapılan semer noktası yaklaşımı, salınımları ihmal ederek elde edilmiştir. Yukarıdaki sonuç, faz salınımlarının dahil edilmesinin $d > 2$ için, düzenin azalmasına, ve $d \le 2$ için, tamamen ortadan kalkmasına yol açtığını gösterir.

Yukarıdaki örnek, *Mermin-Wagner teorisi* denen daha genel bir sonucun tipik bir örneğidir. Teori, $d \le 2$ için, kısa erimli etkileşimleri olan sistemlerde, sürekli bir simetrinin kendiliğinden kırılması diye bir durum olmadığını söyler. Bu kuramın bazı sonuçları:

(1) Sınır boyut olan ve *alt kritik boyut* olarak bilinen iki boyut, dikkatli ele alınmalıdır. Daha sonra da göstereceğimiz gibi, iki boyutlu süperakışkanda, gerçek uzun erimli bir düzen olmadığı halde, aslında bir faz geçişi vardır

(2) Kırılan simetri kesikli ise (mesela $n = 1$), Goldstone modları yoktur. Böyle durumlarda, uzun erimli düzen, alt kritik boyut $d_\ell = 1$'e kadar mümkündür.