8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

III. Ölçeklenme Hipotezi

III.A Homojenlik Varsayımı

Önceki bölümlerde, sürekli bir geçiş, bir küme kritik üstellerle $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta, \cdots\}$ tanımlanmıştı. Salınımların öneminden dolayı, bu üstellerin semer noktası yaklaşık sonuçları güvenilir bulunmamıştı. Değişik termodinamik nicelikler ilişkili olduğu için, bu üsteller birbirlerinde bağımsız olamaz. Bu bölümün amacı, üsteller arasında bağıntılar bulmak ve kritik noktayı tasvir edebilmek için gerekli birbirinde bağımsız minimum sayıda üsteli bulmaktır.

Analitik olmayan yapı, $t < 0$ ve $h = 0$ için, $t = h = 0$ kritik noktasında biten beraber varolma çizgisidir. Çeşitli üsteller, bu nokta civarında, değişik termodinamik niceliklerin $Q(t, h)$ öncül tekilliklerini tasvir ederler. Kanonik topluluktaki temel niceliklerden biri serbest enerjidir, ki semer noktası yaklaşımında

$$f(t,h) = \min\left[\frac{t}{2}m^2 + um^4 - h.m\right]_m \propto \begin{cases} -\frac{t^2}{u} & h = 0,\ t < 0 \text{ için} \\ -\frac{h^{4/3}}{u^{1/3}} & h \neq 0, t = 0, \text{ için} \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

olarak verilir. Serbest enerjideki tekillik, aslında, t ve h'ye bağlı tek bir *homojen* fonskiyon [1] tarafından tanımlanabilir:

$$f(t,h) = |t|^2 g_f(h/|t|^{\Delta}) \quad \text{(III.2)}$$

g_f fonksiyonu $x \equiv h/|t|^{\Delta}$ birleşimine bağlıdır, burada Δ *açıklık üsteli* olarak bilinir. g_f'in asimptotik davranışı, denklemler III.1 ve III.2'yi karşılaştırarak rahatlıkla görülür. $h = 0$ limiti, $\lim_{x\to 0} g_f(x) \sim 1/u$ durumunda elde edilirken, h'nin uygun kuvvetini bulabilmek için $\lim_{x\to\infty} g_f(x) = x^{4/3}/u^{1/3}$ olması gerekmektedir. İkincisi, $f \sim |t|^2 h^{4/3}/(u^{1/3}|t|^{4\Delta/3})$ olmasını gerektirir. $t = 0$ boyunca, f'in t'ye hiçbir bağlılığı olamayacağı için, açıklık üstelinin (denklem III.1'e karşılık gelen) değeri

$$\Delta = \frac{3}{2} \quad \text{(III.3)}$$

olur.

Homojenlik varsayımı, semer noktası yaklaşımının ötesine giderken, serbest enerjinin (ve

[1] Genel olarak, $f(x_1, x_2, \cdots)$ fonksiyonu,

$$f(b^{p_1}x_1, b^{p_2}x_2, \cdots) = b^{p_f} f(x_1, x_2, \cdots)$$

koşulunu bütün ölçekleme faktörleri b için sağlıyorsa, homojendir. b'nin uygun şekilde seçilmesi ile, argümanlardan biri kaldırılabilir ve bu bölümde kullanılan ölçekleme formları elde edilir.

herhangi diğer termodinamik niceliğin) homojen formunu

$$f_{\text{tekil}} = |t|^{2-\alpha} g_f(h/|t|^{\Delta}) \tag{III.4}$$

koruduğu varsayımıdır. Gerçek α ve Δ üstelleri, incelenen kritik noktaya bağlı olabilir. t'ye bağlılık, ısı sığasının $h = 0$'daki tekilliğini türetecek şekilde seçilir. Enerjinin tekil kısmı ($t > 0$ için mesela)

$$\begin{aligned} E_{\text{tekil}} \sim \frac{\partial f}{\partial t} &\sim (2-\alpha) t^{1-\alpha} g_f(h/|t|^{\Delta}) - \Delta h t^{1-\alpha-\Delta} g_f'(h/|t|^{\Delta}) \\ &\sim t^{1-\alpha}\left[(2-\alpha) g_f(h/|t|^{\Delta}) - \frac{\Delta h}{t^{\Delta}} g_f'(h/|t|^{\Delta})\right] \equiv t^{1-\alpha} g_E(h/|t|^{\Delta}) \end{aligned} \tag{III.5}$$

ifadesinden elde edilir. Dolayısıyla, homojen bir fonksiyonun türevi, bir başka homojen fonksiyondur. Benzer şekilde, ikinci türevi (yine $t > 0$ için)

$$C_{\text{tekil}} \sim -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \sim t^{-\alpha} g_C(h/|t|^{\Delta}) \tag{III.6}$$

halini alarak $h \to 0$ durumunda $C_{\text{tekil}} \sim t^{-\alpha}$ ölçeklenme sonucunu türetir. Daha genel bir şekli, $t > 0$ ve $t < 0$ için farklı üsteller kullanarak ve $t = 0$'da uyumlu olacak şekilde

$$C_{\pm}(t,h) = |t|^{-\alpha_{\pm}} g_{\pm}(h/|t|^{\Delta_{\pm}}) \tag{III.7}$$

olarak seçebilirmişiz gibi görünebilir. Ancak bu, serbest enerjinin $h = 0$ ve $t < 0$ için beraber var olma çizgisi dışında her yerde analitik olması koşulu tarafından elenir. Varsayımsal olarak, C fonksiyonu bu noktanın etrafında tamamen analitiktir, ve Taylor açılımı yapılabilir

$$C(t \ll h^{\Delta}) = \mathcal{A}(h) + t\mathcal{B}(h) + \mathcal{O}(t^2) \tag{III.8}$$

Buna ilaveten, aynı açılım hem C_+ hem de C_-'den elde edilebilir. Ancak denklem III.7

$$C_{\pm} = |t|^{-\alpha_{\pm}}\left[A_{\pm}\left(\frac{h}{|t|^{\Delta_{\pm}}}\right)^{p_{\pm}} + B_{\pm}\left(\frac{h}{|t|^{\Delta_{\pm}}}\right)^{q_{\pm}} + \cdots\right] \tag{III.9}$$

açılımını verir, burada $\{p_{\pm}, q_{\pm}\}$, $g_{\pm}$'ın büyük argümanları için asimptotik açılımındaki öncül üstellerdir, ve $\{A_{\pm}, B_{\pm}\}$ karşılık gelen ön faktörlerdir. Denklem III.8'deki Taylor serisine uyum sağlaması, $p_{\pm}\Delta_{\pm} = -\alpha_{\pm}$ ve $q_{\pm}\Delta_{\pm} = -(1+\alpha_{\pm})$ olmasını gerektirir, ve

$$C_{\pm}(t \ll h^{\Delta}) = A_{\pm} h^{-\alpha_{\pm}/\Delta_{\pm}} + B_{\pm} h^{-(1+\alpha_{\pm})/\Delta_{\pm}} |t| + \cdots \tag{III.10}$$

sonucu bulunur. $t = 0$'da süreklilik $\alpha_+/\Delta_{\pm} = \alpha_-/\Delta_-$ ve $(1+\alpha_+)/\Delta_+ = (1+\alpha_-)/\Delta_-$ olmasını gerektirir ve bu da

$$\begin{cases} \alpha_+ = \alpha_- \equiv \alpha \\ \Delta_+ = \Delta_- \equiv \Delta \end{cases} \tag{III.11}$$

anlamına gelir. $|t|$'yi varsaydığımız ölçeklenme şeklinde kullandığımız halde, fonksiyonun $t =$

0'da sonlu h için analitikliğini, parametreleri uygun seçerek sağlayabiliriz, yani $B_- = -B_+$ alarak denklem III.10'u denklem III.8'e uydurarak. Bu durumu saptadıktan sonra, ölçeklenme denklemlerinde, $|t|$ yerine dikkatsizce t kullanabiliriz. Doğal olarak bu görüş bütün $Q(t,h)$ nicelikleri için geçerlidir.

Denklem III.4'deki serbest enerjiden başlayarak, ilginç diğer niceliklerin tekilliklerini hesaplayabiliriz:

• *Mıknatıslanma*,

$$m(t,h) \sim \frac{\partial f}{\partial h} \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} g_m(h/|t|^{\Delta}) \tag{III.12}$$

ifadesinden elde edilir. $x \to 0$ limitinde, $g_m(x)$ bir sabittir ve

$$m(t,h=0) \sim |t|^{2-\alpha-\Delta}, \quad \Longrightarrow \quad \beta = 2-\alpha-\Delta \tag{III.13}$$

olur. Diğer taraftan, $x \to \infty$ olduğunda, $g_m(x) \sim x^p$'dir ve

$$m(t=0,h) \sim |t|^{2-\alpha-\Delta} \left(\frac{h}{|t|^{\Delta}}\right)^p \tag{III.14}$$

olur. Bu limit, t'den bağımsız olduğu için, $p\Delta = 2-\alpha-\Delta$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$m(t,h=0) \sim h^{(2-\alpha-\Delta)/\Delta}, \quad \Longrightarrow \quad \delta = \Delta/(2-\alpha-\Delta) = \Delta/\beta \tag{III.15}$$

olur.

• Benzer şekilde, *alınganlık*

$$\chi(t,h) \sim \frac{\partial m}{\partial h} \sim |t|^{2-\alpha-2\Delta} g_\chi(h/|t|^{\Delta}), \;\Rightarrow\; \chi(t,h=0) \sim |t|^{2-\alpha-2\Delta}, \Rightarrow \;\; \gamma = 2\Delta-2-\alpha \tag{III.16}$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla, homojenlik varsayımının sonuçları:

(1) Bütün kritik niceliklerin $Q(t,h)$ tekil kısımları homojendir, ve geçişin üstünde ve altında aynı üstelleri vardır.

(2) Termodinamik türevler arasındaki bağıntılardan dolayı, bütün böyle niceliklerde, aynı açıklık üsteli Δ olur.

(3) Bütün (hacimsel) kritik üsteller sadece *iki* bağımsız üstelden elde edilir, yani α ve Δ.

(4) Yukarıdakinin sonucu olarak, birtakım *üstel özdeşlikler* vardır. Mesela, denklemler III.13, III.15 ve III.16

$$\begin{aligned} \alpha+2\beta+\gamma &= \alpha+2(2-\alpha-\Delta)+(2\Delta-2+\alpha)=2 && \text{(Rushbrooke Özdeşliği)} \\ \delta-1 &= \frac{\Delta}{2-\alpha-\Delta}-1 = \frac{2\Delta-2+\alpha}{2-\alpha-\Delta} = \frac{\gamma}{\beta} && \text{(Widom Özdeşliği)} \end{aligned} \tag{III.17}$$

olduğunu söyler.

Bu özdeşlikler, aşağıdaki kritik üstel tablosuna bakarak kontrol edilebilir. İlk üç sıra, $d = 3$ boyuttaki bir takım kuramsal tahminlere dayanır; son sıra $d = 2$'deki kesin bir çözümden gelir. Üstel özdeşlikler bu değerlerle, ve güvenilir deneysel datalarla, tamamen tutarlıdırlar.

	α	β	γ	δ	ν	η
$n = 1$	0.11	0.32	1.24	4.9	0.63	0.04
$n = 2$	-0.01	0.35	1.32	4.7	0.67	0.04
$n = 3$	-0.11	0.36	1.39	4.9	0.70	0.04
$n = 1$	0	$1/8$	$7/4$	15	1	$1/4$

III.B Bağdaşıklık Uzunluğunun Iraksaması

Homojenlik varsayımı, serbest enerji ve ondan elde edilen niceliklerle ilgilidir. Bağdaşıklık fonksiyonları ile ilgili hiçbir şey söylemez. Kritik noktanın önemli bir özelliği de bağdaşıklık uzunluğunun ıraksamasıdır ki bu ıraksayan tepki fonksiyonlarından sorumludur, ve onlardan çıkarsanabilir. Bağdaşıklık uzunluğunun ıraksamasındaki ν üstelini içeren bir özdeşlik elde etmek için, serbest enerjinin homojenliği varsayımı yerine aşağıdaki *iki* koşulu koyarız:

(1) Bağdaşıklık uzunluğu ξ'in homojen bir şekli vardır:

$$\xi(t,h) \sim |t|^{-\nu} g(h/|t|^{\Delta}) \tag{III.18}$$

($t = 0$ için, ξ, $h^{-\nu_h}$ şeklinde ıraksar, $\nu_h = \nu/\Delta$ olmak üzere.)

(2) Kritikliğin yakınında, bağdaşıklık uzunluğu ξ sistemdeki en önemli uzunluktur, ve termodinamik niceliklere tekil katkıların *tek* sorumlusudur.

İkinci koşul, serbest enerjinin tekil kısmını belirler. $\ln Z(t,h)$ *yaygın* ve *boyutsuz* olduğu için

$$\ln Z = \left(\frac{L}{\xi}\right)^d \times g_s + \left(\frac{L}{a}\right)^d \times g_a \tag{III.19}$$

şeklinde olmalıdır, burada g_s ve g_a boyutsuz parametrelerin tekil olmayan fonksiyonları olmak üzere (a uygun bir mikroskopik uzunluktur.) Serbest enerjinin tekil kısmı birinci terimden gelir ve

$$f_{\text{tekil}}(t,h) \sim \frac{\ln Z}{L^2} \sim \xi^{-d} \sim |t|^{d\nu} g_f(h/|t|^{\Delta}) \tag{III.20}$$

gibi davranır. Yukarıdaki sonucun basit bir yorumu, sistemi bağdaşıklık uzunluğu boyutlarında birimlere bölerek elde edilebilir. Her bir birim bağımsız bir rastgele değişken olarak düşünülür, ve kritik serbest enerjiye sabit bir katkı getirir. Birimlerin sayısı $(L/\xi)^d$ gibi büyür, böylece denklem III.19 elde edilir.

Yukarıdaki varsayımların sonuçları:

(1) f_{tekil}'in homojenliği doğal olarak çıkar

(2) Ek bir üstel bağıntı elde ederiz:

$$2-\alpha = d\nu \quad \text{(Joshephson Özdeşliği)} \tag{III.21}$$

Genelleştirilmiş homojenlik varsayımından elde edilen özdeşlikler, uzayın d boyutunu içerir ve *üstün ölçekleme bağıntıları* olarak bilinirler. α ve ν arasındaki bağıntı, yukarıdaki tabloda verilen üstellerle tutarlıdır. Ancak, $d > 4$'de geçerli olan semer noktası değerleriyle, $\alpha = 0$ ve $\nu = 1/2$, uyuşmazlar. Dolayısıyla, kritik davranışın herhangi bir teorisi, bu bağıntının düşük enerjideki geçerliliğini, ve $d > 4$'de bozulmasını açıklamalıdır.

III.C Kritik Bağdaşıklık Fonksiyonları ve Öz-Benzerlik

Şimdiye kadar açıklanmayan bir üstel, kritiklikteki bağdaşıklık fonksiyonlarının azalmasını tanımlayan η'dır. Tam kritik noktada, bağdaşıklık uzunluğu sonsuzdur, ve bağdaşıklık fonksiyonunun azalmasını sınırlayan herhangi bir başka uzunluk ölçütü yoktur (örneğin boyutu dışında). Dolayısıyla, bütün bağdaşıklıklar, mesafenin kuvveti şeklinde azalır. Bir önceki bölümde tartışıldığı gibi, mıknatıslanma bağdaşıklıkları

$$G^c_{m,m}(\mathbf{x}) \equiv \langle m(\mathbf{x})m(\mathbf{0})\rangle - \langle m\rangle^2 \sim 1/|\mathbf{x}|^{d-2+\eta} \tag{III.22}$$

şeklinde azalır. Benzer şekilde, enerji-enerji bağdaşıklıklarının azalması için de bir η' üsteli tanımlayabiliriz:

$$G^c_{E,E}(\mathbf{x}) = \langle \mathcal{H}(\mathbf{x})\mathcal{H}(\mathbf{0})\rangle - \langle \mathcal{H}\rangle^2 \sim 1/|\mathbf{x}|^{d-2+\eta'} \tag{III.23}$$

Kritiklikten uzakta, kuvvet yasaları $|\mathbf{x}| \gg \xi$ mesafelerinde kesilirler. Tepki fonksiyonları, bağlantılı bağdaşıklık fonksiyonlarının integrali alınarak elde edilebileceği için, ek üstel özdeşlikler vardır, mesela (Fisher Özdeşliği):

$$\chi \sim \int d^d\mathbf{x} G^c_{mm}(\mathbf{x}) \sim \int^{\xi} \frac{d^d x}{|x|^{d-2+\eta}} \sim \xi^{2-\eta} \sim |t|^{-\nu(2-\eta)}, \quad \Longrightarrow \quad \gamma = (2-\eta)\nu \tag{III.24}$$

Benzer şekilde, ısı sığası için

$$C \sim \int d^d\mathbf{x} G^c_{EE}(\mathbf{x}) \sim \int^{\xi} \frac{d^d x}{|x|^{d-2+\eta'}} \sim \xi^{2-\eta'} \sim |t|^{-\nu(2-\eta')}, \quad \Longrightarrow \quad \alpha = (2-\eta')\nu \tag{III.25}$$

Daha önceki gibi, iki *bağımsız* üstel, bütün tekil kritik davranışları tanımlamak için yeterlidir.

Bu ölçekleme fikrinin önemli bir sonucu, kritik sistemin ek olarak bir *genişleme simetrisi* olmasıdır. Ölçeğin herhangi bir değişimi altında, kritik bağdaşıklık fonksiyonları

$$G_{kritik}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p G_{kritik}(\mathbf{x}) \tag{III.26}$$

gibi davranırlar. Bu, *ölçek değişmezliği* veya *öz-benzerlik* anlamına gelir: eğer kritik sistemin herhangi bir fotoğrafı λ kadar büyütülürse, kontrast farkı dışında (λ^p ile çarpma), elde edilen fotoğraf, orijinaline istatistiksel olarak benzer. Böyle istatistiksel öz-benzerlik, *fraktal* geometrinin ayırıcı özelliğidir. Mandelbrot tarafından belirtildiği üzere, doğadaki pek çok şekil (bulutlar, sahil çizgileri, nehir yatakları, vb) böyle bir davranış sergiler. Landau-Ginzburg olasılığı, dönme değişmezliği gibi *yerel* simetriler kullanılarak oluşturulmuştu. Eğer, sınırlamalara, *genişleme simetrisi*ni de eklersek, elde edilen olasılık gerçekten kritik noktayı tanımlayabilir. Ne yazık ki, böyle bir şartın etkin Hamiltoniyen'i nasıl etkileyeceğini doğrudan görmek mümkün değildir. Bir dikkate değer istisna $d = 2$'dedir, ki burada genişleme simetrisi konformal değişmezlik anlamına gelir, ve konformal değişmez teoriler kurarak pek çok bilgiye ulaşabiliriz. Bunun yerine, genişleme işleminin etkin enerjiye etkisini takip edeceğimiz daha az doğrudan bir işlem tavsiye edeceğiz: *renormalizasyon gurubu* işlemi.