8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

III.D Renormalizasyon Grubu (Kavramsal)

Ölçeklenme kuramının, değişik üstel özdeşlikleri doğru olarak öngörmesi, kritik nokta yakınında, bağdaşıklık uzunluğunun ξ tek önemli uzunluk ölçeği olduğu ve mikroskopik uzunlukların önemsiz olduğu varsayımını destekler. Kritik davranış, ξ ölçeğine kadar öz benzer salınımlar tarafından belirlenir. Öz-benzerlik, tabi ki sadece istatistikseldir, şu bakımdan ki bir mıknatıslanma konfigürasyonu $W[\vec{m}[\mathbf{x}]] \propto \exp\{-\beta\mathcal{H}[\vec{m}(\mathbf{x})]\}$ ağırlığıyla yaratılır. Kadanoff, salınımların öz benzerliğinden faydalanıp, $x \ll \xi$ uzunluk ölçeklerindeki bağdaşık serbestlik derecelerinden yavaşça kurtulmayı önermiştir, ki sonunda görece basit, birbirleri ile bağdaşıksız ξ ölçeğindeki serbestlik dereceleri kalsın. Bu *renormalizasyon gurubu* (RG) denen bir işlem sonucunda gerçekleşir, ki kavramsal temelleri bu bölümde açıklanan üç adımda gerçekleşir.

(1) *Kabalaştırma:* Sistemde, $\vec{m}(\mathbf{x})$'in değişebileceği, açıkça belirtilmeyen bir kısa a uzunluk ölçeği vardır. Bu, spin modellerinde ağ aralığı, veya Landau-Ginzburg Hamiltoniyen'indeki kabalaştırma ölçeğidir. Sistemin dijital bir resminde, a pixel boyutuna karşılık gelir. RG'deki ilk adım, sistemin çözünürlüğünü, bu en küçük ölçeği ba $(b > 1)$ yaparak azaltmaktır. O zaman, *kabalaştırılmış* mıknatıslık

$$\bar{m}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{b^d}\int_{\mathbf{x}\text{ merkezli hücre}} d^d\mathbf{x}' m_i(\mathbf{x}') \tag{III.27}$$

olarak verilir.

(2) *Yeniden Ölçekle:* Çözünürlükteki değişimden dolayı kabalaştırılmış 'resim,' aslına oranla daha kumludur. a'nin ilk çözünürlüğünü, bütün uzunluk ölçeklerini b çarpanı ile azaltırsak yeniden elde edebiliriz, yani

$$\mathbf{x}_{\text{yeni}} = \frac{\mathbf{x}_{\text{eski}}}{b}. \tag{III.28}$$

(2) *Renormalize et:* Yeniden ölçeklenmiş mıknatıslanma profilindeki salınımların değişimleri genelde ilk olandan farklıdır, yani resimlerin kontrastları farklıdır. Bu, kontrastı ζ çarpanı ile değiştirerek düzeltilebilir, *renormalize edilmiş* bir mıknatıslanma tanımlayarak:

$$\vec{m}(\vec{\mathbf{x}}_{\text{yeni}}) = \frac{1}{\zeta b^d}\int_{b\mathbf{x}_{\text{yeni}}\text{ merkezli hücre}} d^d\mathbf{x}' m_i(\mathbf{x}') \tag{III.29}$$

Bu adımları takip ederek, her $\vec{m}_{\text{eski}}(\mathbf{x})$ konfigurasyonu için, renormalize edilmiş bir $\vec{m}_{\text{yeni}}(\mathbf{x})$ konfigürasyonu yaratırız. Denklem III.29, bir küme rastgele değişkenden bir başkasına eşleme olarak düşünülebilinir, ve $W_b[\vec{m}_{\text{yeni}}(\mathbf{x})] \equiv \exp\{-\beta\mathcal{H}_b[\vec{m}_{\text{yeni}}(\mathbf{x})]\}$ olasılık dağılımını, yada ağırlığını oluşturmak için kullanılabilinir. Kadanoff'un içgüdüsü, ξ'dan kısa uzunluk ölçeklerinde, renormalize edilmiş konfigürasyonların, ilk konfigürasyonlara benzer olduğu, dağılımlarını belirleyen Hamiltoniyen'in $\beta\mathcal{H}_b$ da asıl Hamiltoniyen'e benzer olacağıydı. Özel olarak, asıl Hamiltoniyen, iki parametreyi t ve h, sıfıra ayarlayarak kritik yapılabilir, ki bu noktada, baskın dağılımlar, yeniden ölçeklenmiş sisteminkilerle benzerler; dolayısıyla, kritik Hamiltoniyen, bu tarz yeniden ölçeklenme altında değişmezdir. Asıl problemde, sonlu t ve

h için, kritiklikten uzaklaşılır. Kadanoff'un varsayımı, karşılık gelen yeni Hamiltoniyen'in de sıfırdan farklı t_{yeni} ve h_{yeni} ile tasvir edilmesidir.

Asıl ve renormalize edilmiş Hamiltoniyen'in kritiklik civarında iki t ve h parametresi tarafından tasvir edileceği kabulu incelemeyi basitleştirir. RG dönüşümlerinin olasılık dağılımları üzerindeki etkisi, şimdi, $t_{yeni} \equiv t_b(t_{eski}, h_{eski})$ ve $h_{yeni} \equiv h_b(t_{eski}, h_{eski})$ iki parametreli eşleştirmeleri ile tasvir edilir. Bir sonraki varsayım, dönüşüm sadece en kısa mesafelerdeki değişimler içerdiği için, herhangi bir tekilliğe yol açamamasıdır. Renormalize edilmiş parametreler, asıl parametrelerin *analitik* bir fonksiyonu olmalı, ve bu sebepten

$$\begin{cases} t_b(t,h) &= A(b)t + B(b)h + \cdots \\ h_b(t,h) &= C(b)t + D(b)h + \cdots \end{cases} \tag{III.30}$$

şeklinde açılabilir. Yukarıdaki Taylor açılımında, sabit terimin olmadığına dikkat edin. Bu, eğer $\beta\mathcal{H}$ kritiklik noktasında ise ($t = h = 0$), $\beta\mathcal{H}_b$'nin de kritiklik noktasında $t_{yeni} = h_{yeni} = 0$ olması gerektiğini ifade eder. Ayrıca, dönme simetrisinden dolayı, birleştirilmiş ($m(x) \mapsto -m(x),\ h \mapsto -h,\ t \mapsto t$) dönüşümü altında, herhangi bir konfigürasyonun ağırlığı değişmez. Bu simetri RG tarafından korunduğu için, yukarıdaki ifadede B ve C sıfır olmalı, ki bunun sonucunda daha da sadeleştirip

$$\begin{cases} t_b(t,h) &= A(b)t + \cdots \\ h_b(t,h) &= D(b)h + \cdots \end{cases} \tag{III.31}$$

elde ederiz. Geri kalan katsayılar $A(b)$ ve $D(b)$, (belirsiz) ölçekleme çarpanı b'ye bağlıdır, ve basit olarak $b = 1$ için $A(1) = D(1) = 1$. Yukarıdaki dönüşümler arka arkaya yapılabileceği için, b_1 ve b_2 ile ölçeklenmelerin net etkisi, ölçeği $b_1 b_2$ ile değiştirmektir, RG işlemi bazen *yarı-grup* olarak adlandırılır. Bu terim, RG'nin, konfigürasyon uzayındaki etkisi ile ilgilidir: her mıknatıslanma profili, tek olarak, daha büyük ölçekteki bir başkası ile eşleştirilir, ancak ters işlem tek değildir, çünkü kabalaştırma sırasında, bazı kısa ölçek bilgileri kaybolmuştur. (Aslında, dönüşümü Hamiltoniyen'in parametrelerinin uzayında tersine çevirmekle ilgili bir problem yoktur.) Denklemler III.31'deki A ve B'nin b'ye bağlılığı, bu gurup özelliğinden bulunabilir. $b = 1$'de $A = D = 1$ ve $t(b_1 b_2) \approx A(b_1)A(b_2)t \approx A(b_1 b_2)t$ olduğu için, $A(b) = b^{y_t}$ olmalıdır ve benzer şekilde $D(b) = b^{y_h}$ olmalırdır, böylece

$$\begin{cases} t' \equiv t &= b^{y_t} t + \cdots \\ h' \equiv h_b &= b^{y_h} h + \cdots \end{cases} \tag{III.32}$$

olur. Eğer $\beta\mathcal{H}_{eski}$ kritiklikten biraz uzaktaysa, büyük ancak sonlu bir bağdaşıklık uzunluğu ile tasvir edilir ξ_{eski}. RG dönüşümünden sonra, denklem III.28'deki yeniden ölçeklemeden dolayı, yeni bağdaşıklık uzunluğu, b çarpanı kadar küçüktür. Dolayısıyla, renormalize edilmiş Hamiltoniyen, daha az kritiktir, ve RG işlemi, parametreleri orijinden uzaklaştırır, yeni y_t ve y_h üstelleri pozitiftir.

• Şimdi, denklem III.32'ye giden varsayımların bazı sonuçlarını araştırabiliriz.

1. *Serbest Enerji* RG dönüşümleri birden fazla asıl konfigürasyonları, tek yenilerine eşleştiren dönüşümlerdir. Yeni konfigürasyonların ağırlığı, $W'([m'])$, eski konfigürasyonların ağırlıklarının

$(W[m])$ toplamına eşittir, bölüşüm fonksiyonu korunur, yani

$$Z = \int DmW([m]) = \int Dm'W'([m']) = Z' \tag{III.33}$$

Dolayısıyla, $\ln Z = \ln Z'$ ve karşılık gelen serbest enerjiler

$$Vf(t,h) = V'f(t',h') \tag{III.34}$$

şeklinde ilişkilidirler. d-boyutta, ölçeklenmiş hacim b^d çarpanı kadar küçüktür ve

$$f(t,h) = b^{-d}f(b^{y_t}t, b^{y_t}h), \tag{III.35}$$

burada iki serbest enerjinin de *aynı Hamiltoniyen*'den elde edildiğini ve t ve h parametrelerinin denklem III.32'ye göre değiştiğini varsaydık. Denklem III.35, t ve h'nin *homojen* bir fonksiyonunu tanımlar. Bu, yeniden ölçekleme çarpanı b'yi b^{y_t} bir sabit olacak şekilde seçildiğinde, mesela bir, yani $b = t^{-1/y_t}$, daha açık olur:

$$f(t,h) = t^{d/y_t}f(1, h/t^{y_h/y_t}) \equiv t^{d/y_t}g_f(h/t^{y_h/y_t}) \tag{III.36}$$

Böylece, denklem III.4'deki ölçekleme formunu yeniden elde etmiş olduk, ve üstelleri

$$2-\alpha = d/y_t \quad , \quad \Delta = y_h/y_t \tag{III.37}$$

olarak belirleyebiliriz.

2. *BağdaşıklıBağdaşıklık* RG dönüşümleri sırasında, bütün uzunluk birimleri b çarpanı ile küçültülür. Bu bağdaşıklık uzunluğu için de geçerlidir, dolayısıyla

$$\xi(t,h) = b\xi(b^{y_t}t, b^{y_h}h) = t^{-1/y_t}\xi(1, h/t^{y_h/y_t}) \sim t^{-\nu} \tag{III.38}$$

Buradan, $\nu = 1/y_t$ olarak belirleyebiliriz, ve denklem III.37'yi kullanarak, üstünölçekleme özdeşliğini, $2-\alpha = d\nu$ yeniden buluruz.

3. *Mıknatıslanma:* Serbest enerjinin homojen formundan (denklem III.36), mıknatıslanma gibi diğer hacimsel nicelikleri elde edebiliriz. Alternatif olarak, Z, V ve h için RG sonuçlarından, doğrudan

$$m(t,h) = -\frac{1}{V}\frac{\partial \ln Z(t,h)}{\partial h} = -\frac{1}{b^dV'}\frac{\partial \ln Z'(t',h')}{b^{-y_h}\partial h'} = b^{y_h-d}m(b^{y_t}t, b^{y_h}h) \tag{III.39}$$

elde ederiz.

Dolayısıyla, açıktır ki, genel olarak, herhangi bir X niceliğinin tekil kısmı, homojen bir forma sahiptir:

$$X(t,h) = b^{y_X}X(b^{y_t}t, b^{y_h}h). \tag{III.40}$$

Herhangi eşlenik değişken çiftleri için, Hamiltoniyen'e $\int d^d\mathbf{x}F\cdot X$ olarak katkı veren, *ölçeklenme boyutları* $y_X = y_F - d$ olarak ilişkilidirler, burada RG sonucunda $F' = b^{y_F}F$.

III.E Renormalizasyon Gurubu (Formal)

Bir önceki bölümde, her kritik davranışın denklem III.32'deki tekrarlama bağıntılarından elde edilebileceğini belirtmiştik. Kavramsal olarak cazip olsada, formal olarak böyle bir işlemin nasıl yapılacağı net değildir. Özellikle, iki Hamiltoniyenin formları niye aynı olmak zorunda, ve niye iki t ve h parametresi dönüşümü tanımlamak için yeterlidir? Bu bölümde, seyreltme işleminin Hamiltoniyen'e etkisini belirleyebileceğimiz daha formal bir süreçten bahsedeceğiz. Programın farklı adımları şöyledir:

(1) Simetrilerin izin verdiği en genel Hamiltoniyen'den başla. Mesela, dönme simetrisinin varlığında

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{t}{2}m^2 + um^4 + vm^6 + \cdots + \frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{L}{2}(\nabla^2 m)^2 + \cdots\right]. \qquad \text{(III.41)}$$

Böyle bir simetriye sahip belirli bir sistem, (sonsuz boyutlu) parametre uzayındaki bir nokta olarak belirlenebilir $S \equiv (t, u, v, \cdots, K, L, \cdots)$.

(2) Konfigürasyon uzayında, renormalizasyonun üç adımını da uygula: (i) b ile kabalaştır; (ii) yeniden ölçekle, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/b$; ve (iii) Renormalize et, $m' = m/\zeta$. Bu, bir değişken değiştirme tanımlar:

$$m'(\mathbf{x}') = \frac{1}{\zeta b^d}\int_{b \text{ boyutunda, } b\mathbf{x}' \text{ merkezli bir hücre}} d^d\mathbf{x}\, m(\mathbf{x}) \qquad \text{(III.42)}$$

Orijinal konfigürasyonlar için verilen $\mathcal{P}[m(\mathbf{x})] \propto \exp(-\beta\mathcal{H}[m(\mathbf{x})])$ olasılıklarıyla, yukarıdaki değişken değiştirmeyi kullanarak, yeni konfigürasyon için, karşılık gelen $\mathcal{P}'[m'(\mathbf{x}')]$ olasılıklarını oluşturabiliriz. Doğal olarak, bu programdaki en zor adım budur.

(3) RG işleminde, dönme simetrisi korunduğu için, ölçeklenmiş Hamiltoniyen de denklem III.41'deki parametre uzayındaki bir nokta ile belirlenebilir, yani

$$\begin{aligned}\beta\mathcal{H}'[m'(\mathbf{x}')] &\equiv \ln\mathcal{P}[m'(\mathbf{x}')]\\ &= f_b + \int d^d\mathbf{x}'\left[\frac{t'}{2}m^2 + u'm'^4 + v'm'^6 + \cdots + \frac{K'}{2}(\nabla m')^2 + \frac{L'}{2}(\nabla^2 m)^2 + \cdots\right].\end{aligned} \qquad \text{(III.43)}$$

Renormalize edilmiş parametreler, asıl parametrelerin bir fonksiyonudur, yani $t' = t_b(t, u, \cdots)$; $u' = u_b(t, u, \cdots)$, vb., ve parametre uzayında bir $S' = \Re_b S$ eşleşmesi tanımlar.

(4) $\Re_b$ işlemi, seyreltmenin, sistemin Hamiltoniyeni üzerindeki etkisini tanımlar. Dolayısıyla, istatistiksel olarak öz-benzer konfigürasyonları tasvir eden Hamiltoniyenler, S^* *sabit noktalarına* karşılık gelirler, öyle ki, $\Re_b S^* = S^*$. Bağdaşıklık uzunluğu, Hamiltoniyen'in parametrelerinin bir fonksiyonu, RG etkisinde b kadar azaldığı için (yani $\xi(S) = b\xi(\Re_b S)$), sabit noktada, ya sıfır ya da sonsuz olmalıdır. $\xi^* = 0$ olan sabit noktalar, her noktada birbirinden bağımsız dalgalanmaların olduğu ve tamamen düzensiz (sonsuz sıcaklık) ya da tamamen düzenli (sıfır sıcaklık) sistemlere karşılık gelir. $\xi^* = \infty$ olan sabit noktalar kritik noktayı ($T = T_c$) tanımlarlar.

(5) Denklem III.32, parametre uzayı 2 boyutlu olan basitleştirilmiş bir durumu temsil eder. $t = h = 0$ noktası sabit noktadır, ve bu denklemlerdeki en düşük mertebeden terimler, bu nokta civarındaki davranışı belirlerle. Genel olarak, bir sabit noktanın kararlılığını, tekrarlama bağıntılarını civarında *doğrusallaştırarak* inceleyebiliriz: RG altında, bir $S^* + \delta S$ noktası,

$$S^*_\alpha + \delta S'_\alpha = S^*_\alpha + (\Re^L_b)_{\alpha\beta}\delta S_\beta + \cdots, \quad \text{burada} \quad (\Re^L_b)_{\alpha\beta} \equiv \left.\frac{\partial S'_\alpha}{\partial S_\beta}\right|_{S^*} \tag{III.44}$$

noktasına dönüşür. Şimdi, $(\Re^L_b)_{\alpha\beta}$ noktasını köşegenleştirerek, $\mathcal{O}_i$ özvektörlerini, ve karşılık gelen $\lambda(b)_i$ öz-değerlerini elde ederiz. Gurup özelliğinden dolayı[2]

$$\Re^L_b \Re^L_{b'} \mathcal{O}_i = \lambda(b)_i \lambda(b')_i \mathcal{O}_i = \Re^L_{bb'} \mathcal{O}_i = \lambda(bb')\mathcal{O}_i \tag{III.45}$$

$\lambda(1)_i = 1$ koşuluyla beraber, yukarıdaki denklem

$$\lambda(b)_i = b^{y_i} \tag{III.46}$$

olduğu anlamına gelir.

$\mathcal{O}_i$ vektörlerine, S^* sabit noktasının ölçeklenme yönleri denir, ve karşılık gelen y_i'ler *anomal boyutlar*dır. Sabit bir noktanın civarındaki herhangi bir Hamiltoniyen, $S = S^* + \sum_i g_i \mathcal{O}_i$ noktası ile belirlenir. Renormalize edilmiş Hamiltoniyenin etkileşme parametreleri $S' = S^* + \sum_i g_i b^{y_i} \mathcal{O}_i$ noktası ile belirlenir. Aşağıdaki terimler, öz vektörleri sınıflandırmak için kullanılır:

- $y_i > 0$ ise, g_i, ölçeklenme altında *artar*, ve $\mathcal{O}_i$ *önemli operatör*dür.
- $y_i < 0$ ise, g_i ölçeklenme altında *azalır*, ve $\mathcal{O}_i$ *önemsiz operatör*dür.
- $y_i = 0$ ise, g_i *sınırdaki operatör*dür, ve davranışının belirlenebilmesi için, daha yüksek mertebeden terimler gereklidir.

Önemsiz operatörlerin yarattığı alt uzay, sabit S^* noktasının *çekim havzası*dır. ξ, RG altından her zaman için azaldığı için, ve $\xi(S^*) = \infty$ olduğu için, S^*'ın çekim havzasındaki herhangi bir noktada da ξ sonsuzdur. S^* yakınlarındaki herhangi bir nokta için, bağdaşıklık uzunluğu

$$\xi(g_1, g_2, \cdots) = b\xi(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2, \cdots) \tag{III.47}$$

denklemini sağlar. Yeterince büyük bir b için, önemsiz bütün operatörler, sıfıra giderler. Bundan dolayı, ξ'in öncül tekilliği, geriye kalan *önemli* operatörler tarafından belirlenir. Özellikle, operatörler azalan boyut sırasıyla işaretlendiyse, b'yi $b^{y_1} g_1 = 1$ olacak şekilde seçebiliriz. Bu durumda, denklem III.47

$$\xi(g_1, g_2, \cdots) = g_1^{-1/y_1} f(g_2/g_1^{y_2/y_1}, \cdots) \tag{III.48}$$

anlamına gelir. Dolayısıyla, ξ'ın ıraksaması için bir üstel $\nu_1 = 1/y_1$, ve g_α'larla ilişkilendirilmiş $\Delta_\alpha = y_\alpha / y_1$ açıklık üstellerini elde ettik.

[2] $\Re^L_b \Re^L_{b'} = \Re^L_{bb'} = R^L_{b'} \Re^L_b$ gurup özelliği, farklı b'lere karşılık gelen, doğrusallaştırılmış matrislerin de yer değiştirebildiğini gösterir. Dolayısıyla, aynı anda köşegenleştirilebilirler, bu da $\{\mathcal{O}_i\}$ özdeğerlerinin b'den bağımsız olduğu anlamına gelir.

S^* sabit noktasının, denklem III.41'deki mıknatısın, sıfır manyetik alandaki kritik noktasını tasvir ettiğini düşünelim. Sıcaklık, veya başka bir kontrol parametresi değiştikçe, Hamiltoniyen'in katsayıları değişir, ve S noktası, parametre uzayında bir yörünge boyunca hareket eder. (Kritik sıcaklıktaki) tek bir nokta hariç, mıknatısın sonlu bağdaşıklık uzunluğu vardır. Bu, eğer S noktasının yörüngesi, S^* noktasının çekim havzasını sadece bir noktada keserse elde edilir. Bunu elde etmek için, çekim havzasının ko-boyutunun bir olması lazımdır, yani S^* sabit noktasının bir ve yanlızca bir önemli operatörünün olması gerekir. By, *evrensellik* için bir açıklama getirir, yani sistemin pek çok mikroskopik detayı, çekim havzasını oluşturan devasa uzayı meydana getirir. Manyetik alanın varlığında, kritik noktaya ulaşmak için iki sistem parametresinin ayarlanması gerekmektedir ($T = T_c$ ve $h = 0$). Dolayısıyla, manyetik alan, S^*'daki ek bir önemli operatöre karşılık gelir. Yeniden, diğer 'tek' etkileşimler, $\{m^3, m^5, \cdots\}$ gibi, herhangi bir başka önemli operatör yaratmamalıdır.

Bu bölümde, genel hatları açıklanan program, oldukça kesin olmakla beraber, bariz bir kaç eksiklikleri vardır: (2). adımdaki RG dönüşümlerini gerçekte analitik olarak nasıl yapabiliriz? Simetri tarafından izin verilen sonsuz sayıda etkileşim vardır, dolayısıyla, parametre uzayı S elverişsiz derecede büyüktür. Önceden, RG dönüşümlerinde sabit noktalar olduğunu; $\Re_b$nin doğrusallaştırılabileceğini; önemli operatörlerin birkaç tane olduğunu, vb. nasıl biliyoruz? Kadanoff'un ilk düzenlemesini takip edersek, Wilson bu adımların, Landau-Ginzburg modelinde nasıl yapılabileceğini gösterene kadar, bir belirsizlik dönemi vardı.