8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Ölçekleme & Renormalizasyon

1. *Doğrusal olmayan σ modeli*, n bileşenli birim vektörleri tasvir eder. Daha sonra göstereceğimiz gibi, $d = 2$ boyutta, T, ve manyetik alan h için yineleme bağıntıları

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\ell} = \frac{(N-2)}{2\pi} T^2 \\ \frac{dh}{d\ell} = 2h \end{cases}$$

olur.
(a) $T \to 0$ iken, bağdaşıklık uzunluğu nasıl ıraksar?
(b) $T, h \to 0$ iken, serbest enerjinin tekil şeklini yazın.
(c) $h = 0$ için, alınganlık χ, $T \to 0$ iken, nasıl ıraksar?

****

2. *Çiftlenmiş Skalarlar:* İki tane, tek bileşenli m ve ϕ alanlarını çiftleyen

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{t}{2} m^2 + \frac{K}{2} (\nabla m)^2 - hm + \frac{L}{2} (\nabla^2 \phi)^2 + v \nabla m . \nabla \phi \right]$$

Hamiltoniyenini düşünün.
(a) $\beta\mathcal{H}$'i $m(\mathbf{q})$ ve $\phi(\mathbf{q})$ Fourier dönüşümleri cinsinden yazınız.
(b) Uzunlukları $\mathbf{q}' = b\mathbf{q}$; ve alanları $m'(\mathbf{q}') = \tilde{m}(\mathbf{q})/z$ ve $\phi'(\mathbf{q}') = \tilde{\phi}(\mathbf{q})/y$ olacak şekilde yeniden ölçekleyerek, metindeki gibi renormalizasyon gurup dönüşümlerini oluşturun.
(c) $K' = K$ ve $L' = L$ olacak şekilde bir sabit nokta vardır. y_t, y_h ve y_v'yi bu sabit noktada bulun.
(d) Serbest enerjinin tekil kısmının, t, h, v'nin sıfır olduğu nokta yakınında, $f(t, h, v) = t^{2-\alpha} h(h/t^{\Delta}, v/t^{\omega})$ ölçeklenme şekli vardır. α, Δ ve ω'yı bulun.
(e) $t' = t$ ve $L' = L$ olacak şekilde bir başka sabit nokta vardır. Bu sabit noktadaki önemli operatörler hangileridir, ve nasıl ölçeklenirler?

****

3. *Eşyönsüz Kritiklik:* Birkaç malzeme, sıvı kristaller gibi, eşyönsüzdür, ve farklı yönlerde farklı davranırlar, ki bu yönler, sırasıyla, paralel ve dik olarak beliritlecektir. d uzamsal boyutun n paralel yöne $\mathbf{x}_\parallel$ ve $d - n$ dik yöne $\mathbf{x}_\perp$ guruplandığını varsayalım. Tek bileşenli,

$$\beta\mathcal{H}_0 = \int d^n\mathbf{x}_\parallel d^{d-n}\mathbf{x}_\perp \left[\frac{K}{2} (\nabla_\parallel m)^2 + \frac{L}{2} (\nabla_\perp^2 m)^2 + \frac{t}{2} m^2 - hm \right]$$

ve

$$U = u \int d^n\mathbf{x}_\parallel d^{d-n}\mathbf{x}_\perp m^4$$

olarak $\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + U$ Landau-Ginzburg Hamiltoniyenine tabi bir $m(\mathbf{x}_\parallel, \mathbf{x}_\perp)$ alanı düşünelim. (*$\beta\mathcal{H}$'in $\mathbf{x}_\parallel$ yönlerindeki* **birinci** *gradyana, ve $\mathbf{x}_\perp$ yönlerindeki ikinci gradyana bağlı olduğuna dikkat edin.*)
(a) $\beta\mathcal{H}$'i, $m(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{q}_\perp)$ Fourier bileşenleri cinsinden yazınız.
(b) Koordinatları $\mathbf{q}'_\parallel = b\mathbf{q}_\parallel$ ve $\mathbf{q}'_\perp = c\mathbf{q}_\perp$, ve alanı $m'(\mathbf{q}') = m(\mathbf{q})/z$ olacak şekilde yeniden

ölçekleyerek, $\beta\mathcal{H}_0$ için renormalizasyon gurup dönüşümlerini oluşturun. *Paralel ve dik yönlerin farklı şekilde ölçeklendiğine dikkat edin.* K, L, t için yineleme bağıntılarını b, c ve z cinsiden yazın. (Brillouin bölgesinin tam şekli bu aşamada önemli değildir, ve eklenen bir sabit katkı getiren integrali hesaplamanız gerekmez.)
(c) $c(b)$ ve $z(b)$'yi $K' = K$ ve $L' = L$ olacak şekilde seçin. Elde edilen sabit noktada, t ve h'yi yeniden ölçekleyen, y_t ve y_h özdeğerlerini hesaplayın.
(d) Orijinal ve yeniden ölçeklenmiş problemlerin $f(t, h)$ ve $f'(t', h')$ serbest enerjileri (-nin tekil kısımları) arasındaki bağıntıyı yazın. Buradan, tedirgenmemiş serbest enerjiyi $f(t, h) = t^{2-\alpha} g_f(h/t^{\Delta})$ homojen formunda yazın, ve α ve Δ üstelleri belirleyin.
(e) Tedirgenmemiş sıfır alan alınganlığı $\chi(t, h = 0)$, $t \to 0$ iken nasıl ıraksar?
Bu problemin geri kalanında $h = 0$ alın, ve U'yu tedirgeme olarak ele alın
(f) Tedirgenmemiş Hamiltoniyende, $\langle m(q)m(q')\rangle_0$ beklenen değerini, ve karşılık gelen alınganlığı $\chi_0(q) = \langle |m_q|^2\rangle_0$ hesaplayın, burada q, $(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{q}_\perp)$'i gösterir.
(g) U tedirgemesini, $m(q)$ normal modları cinsinden yazın.
(h) RG'yi kullanarak, yada herhangi başka bir yöntemle, Gaussiyan üstellerinin geçerliliği için, üst kritik noktayı bulun.
(i) $\langle m(q)m(q')\rangle$ için açılımı, U'da birinci mertebeye kadar yazın, ve düzeltme terimini, iki nokta beklenen değerlerin çarpımı haline indirgeyin.
(j) $\chi(q)$ için ifadeyi, tedirgeme kuramında birinci mertebeye kadar yazın, ve u mertebesinde, geçiş noktasını belirleyin. (Hiçbir integrali açıkça hesaplamayın.)

****

4. Spinler arasındaki *uzun-erimli etkileşimler*, herzamanki Landau-Ginzburg Hamiltoniyenine

$$\int d^d\mathbf{x} \int d^d\mathbf{y} J(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\vec{m}(\mathbf{x}) \cdot \vec{m}(\mathbf{y})$$

terimi eklenerek tasvir edilebilir.
(a) $J(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$ için, Hamiltoniyen

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{H} &= \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{t + K_2 q^2 + K_\sigma q^\sigma + \cdots}{2} \vec{m}(\mathbf{q}) \cdot \vec{m}(-\mathbf{q}) \\ &+ u \int \frac{d^d\mathbf{q}_1 d^d\mathbf{q}_2 d^d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^{3d}} \vec{m}(\mathbf{q}_1) \cdot \vec{m}(\mathbf{q}_2) \vec{m}(\mathbf{q}_3) \cdot \vec{m}(-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.
(b) $u = 0$ için, (t, K_2, K_σ) için yineleme bağıntılarını yazın, ve K_σ'nın $\sigma > 2$ için önemsiz olduğunu gösterin. Sabit Hamiltoniyen, bu durumda nedir?
(c) $\sigma < 2$ ve $u = 0$ için, spin ölçeklenme çarpanının seçiminin $K'_\sigma = K_\sigma$ olacak şekilde olması gerektiğini gösterin, ki bu durumda K_2 önemsizdir. Şimdi, sabit Hamiltoniyen nedir?
(d) $\sigma < 2$ için, yineleme bağıntısından, genelleştirilmiş Gaussiyan üstellerini hesaplayın. u'nun önemsiz olduğunu, ve dolayısıyla Gaussiyan sonuçların, $d > 2\sigma$ için geçerli olduğunu gösterin.
(e) $\sigma < 2$ için, metindeki gibi, (t, K_σ, u) için yineleme bağıntıları oluşturmak için, u'da tedirgeme açılımını kullanın.
(f) $d < 2\sigma$ için, ν ve η kritik üstellerini $\epsilon = d - 2\sigma$'da birinci mertebede hesaplayın. [bkz. M. E.

Fisher, S.-K. Ma ve B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett. **29**, 917 (1972).]
(g) Eğer $J(r) \propto \exp(-r/a)$ ise, kritik davranış nedir? Açıklayın.

****