8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Aktarma Matrisleri & Konum uzayı renormalizasyonu

Bu problem kümesi, kısmen, yakın komşu etkileşimli, çeşitli tek boyutlu problemi çözmede kullanılan *aktarma matrisi metodu*nu sunmak amacındadır. Örnek olarak, N İsing spinli $\sigma_i = \pm 1$, en yakın komşu K çiftlenimli, ve h manyetik alanlı doğrusal zinciri düşünün. Hesapları kolaylaştırmak için, zincirin kapalı olduğunu varsayalım, öyleki ilk ve son spinler de çiftlenmiştir (tekrarlanan sınır koşulları):

$$-\beta\mathcal{H} = K(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \cdots + \sigma_{N-1}\sigma_N + \sigma_N\sigma_1) + h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \tag{1}$$

Karşılık gelen bölüşüm fonksiyonu, bütün durumlar üzerinden toplanarak elde edilir, ve matrislerin çarpımı şeklinde ifade edilebilir, çünkü

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\prod_{i=1}^{N}\exp\left[K\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{h}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})\right] \\ &\equiv \text{İz}\left[\langle\sigma_1|T|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|T|\sigma_3\rangle\cdots\langle\sigma_N|T|\sigma_1\rangle\right] = \text{İz}\left[T^N\right] \end{aligned} \tag{2}$$

burada elemanları

$$\langle\sigma_i|T|\sigma_j\rangle = \exp\left[K\sigma_i\sigma_j + \frac{h}{2}(\sigma_i + \sigma_j)\right], \quad \text{yani} \quad T = \begin{pmatrix} e^{K+k} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix} \tag{3}$$

olan 2×2'lik *aktarma matrisini* tanımladık. Matrisin izi için olan ifade, T'yi köşegenleştiren bazda hesaplanabilir, ve bu durumda iki $\lambda_\pm$ özdeğeri cinsinden

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N = \lambda_+^N\left[1(\lambda_-/\lambda_+)^N\right] \approx \lambda_+^N \tag{4}$$

şeklinde yazılabilir. $\lambda_+ > \lambda_-$ olduğunu varsaydık, ve $N \to \infty$ limitinde, daha büyük olan özdeğer, toplamı belirlediği için, serbest enerji

$$\beta f = -\ln Z/N = -\ln\lambda_+ \tag{5}$$

Karakteristik denklemi çözersek, özdeğleri

$$\lambda_\pm = e^K\cosh h \pm \sqrt{e^{2K}\sinh^2 h + e^{-2K}} \tag{6}$$

olarak buluruz. Elde edilen serbest enerjinin tekillikleri (sıfır sıcaklıktaki) hakkındaki tartışmayı sonraki bölüme bırakacağız, ve onun yerine, $h = 0$ limitindeki ortalamalara ve bağdaşıklıklara bakacağız.

i konumundaki spinin ortalamasını hesaplamak için, hesaplamamız gereken

$$\begin{aligned} \langle\sigma_i\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\sigma_i\prod_{j=1}^{N}\exp\left(K\sigma_j\sigma_{j+1}\right) \\ &\equiv \frac{1}{Z}\text{İz}\left[\langle\sigma_1|T|\sigma_2\rangle\cdots\langle\sigma_{i-1}|T|\sigma_i\rangle\sigma_i\langle\sigma_i|T|\sigma_{i+1}\rangle\cdots\langle\sigma_N|T|\sigma_1\rangle\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{Z}\text{İz}\left[T^{i-1}\hat{\sigma}_z T^{N-i+1}\right] = \frac{1}{Z}\text{İz}\left[T^N\hat{\sigma}_z\right] \tag{7}$$

burada, izin içindeki matrislerin yerini değiştirdik, ve $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ her zamanki 2×2 Pauli matrisidir. Denklem 7'deki ifadeyi hesaplamanın bir yolu, T matrisinin köşegenel olduğu bir baza dönmektir. $h = 0$ için, bu, üniter $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi ile elde edilir ve

$$\langle\sigma_i\rangle = \frac{1}{Z}\text{İz}\left[\begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_+^N \\ \lambda_-^N & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

elde edilir. Bu dönüşüm altında, $\hat{\sigma}_z$ Pauli matrisinin $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisine döndüğüne dikkat edin.

Sıfır alanda mıknatıslığın yok olması, tabi ki, simetriden dolayı bekleniyordu. Daha ilginç bir nicelik, iki spin bağdaşıklık fonksiyonudur

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_i\sigma_{i+r}\rangle &= = \frac{1}{Z}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\sigma_i\sigma_{i+r}\prod_{j=1}^{N}\exp\left(K\sigma_j\sigma_{j+1}\right) \\
&= \frac{1}{Z}\text{İz}\left[T^{i-1}\hat{\sigma}_z T^r\hat{\sigma}_z T^{N-i-r+1}\right] = \frac{1}{Z}\text{İz}\left[\hat{\sigma}_z T^r\hat{\sigma}_z T^{N-r}\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

Bir kere daha, T'nin köşegenel olduğu baza dönmek, izi kolaylaştırır

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_i\sigma_{i+1}\rangle &= \frac{1}{Z}\text{İz}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_+^r & 0 \\ 0 & \lambda_-^r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_+^{N-r} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-r} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\text{İz}\begin{pmatrix} \lambda_+^{N-r}\lambda_-^r & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-r}\lambda_+^r \end{pmatrix} = \frac{\lambda_+^{N-r}\lambda_-^r + \lambda_-^{N-r}\lambda_+^r}{\lambda_+^N + \lambda_-^N}
\end{aligned} \tag{10}$$

Tekrarlanan sınır koşulundan dolayı, yukarıdaki sonucun $r \to (N - r)$ altında değişmez olduğuna dikkat edin. $N \gg r$ limitiyle ilgileniyoruz, ki bu durumda

$$\langle\sigma_i\sigma_{i+r}\rangle \approx \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r \equiv e^{-r/\xi} \tag{11}$$

olur, burada bağdaşıklık uzunluğu

$$\xi = \left[\ln\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{\ln\tanh K} \tag{12}$$

Yukarıdaki aktarma matrisi yaklaşımı, herhangi bir tek boyutlu, $\{s_i\}$ değişkenli, ve en yakın komşu etkileşimli zincire genelleştirilebilir. Bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \sum_{\{s_i\}}\exp\left[\sum_{i+1}^{N}B(s_i, s_{i+1})\right] = \sum_{\{s_i\}}\prod_{i=1}^{N}e^{B(s_i,s_{i+1})} \tag{13}$$

olarak yazılabilir, burada

$$\langle s_i|T|s_j\rangle = e^{B(s_i,s_j)} \tag{14}$$

elemanlı *aktarma matrisi* T'yi tanımladık. *Tekrarlanan sınır koşulları* durumunda,

$$Z = \text{İz}\left[T^N\right] \approx \lambda^N_{\text{en büyük}} \tag{15}$$

elde ederiz. $N \to \infty$ durumunda, izin en büyük özdeğeri tarafından belirlendiğine dikkat ediniz. Oldukça genel olarak, aktarma matrisinin en büyük değeri serbest enerjiyle ilgiliyken, bağdaşma uzunluğu özdeğerlerin oranından elde edilir. *Frobenius'un kuramı*, pozitif elemanlı herhangi bir sonlu matrisin, en büyük özdeğerin yoz olmadığını söyler. Bu, $\lambda_{\text{en büyük}}$ ve Z'nin B'deki parametrelerin analitik bir fonksiyonu olduğunu, ve tek boyutlu modellerin, sadece sıfır sıcaklıkta (bazı matris elemanları sonsuz olduğunda) bir tekilliği olabileceği (ve dolayısıyla faz geçişi) anlamına gelir.

Yukarıdaki ifade, kesikli $\{s_i\}$ değişkenleri dilinde yapılandırılmış olsa da, takip eden problemlerde gösterildiği gibi, yöntem sürekli değişkenlere de uygulanabilir. İkincisinin bir örneği olarak, *Heisenberg model* Hamiltoniyeni

$$-\beta\mathcal{H} = K\sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1} \tag{16}$$

ile üç bileşenli *birim* $\vec{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ spinlerini düşünelim. Bütün spin dizilimleri üzerinden toplarsak, bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \underset{\vec{s}_i}{\text{İz}}\, e^{K\sum_{i=1}^{N}\vec{s}_i\cdot\vec{s}_{i+1}} = \underset{\vec{s}_i}{\text{İz}}\, e^{K\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}e^{K\vec{s}_2\cdot\vec{s}_3}\cdots e^{K\vec{s}_N\cdot\vec{s}_1} = \text{İz}T^N \tag{17}$$

olarak yazılabilir, burada $\langle\vec{s}_1|T|\vec{s}_2\rangle = e^{K\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}$ aktarma fonksiyonudur. Oldukça genel olarak, T'yi $\sum_\alpha \lambda_\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$ (Dirac gösterimi) köşegenel şekline getirmek isteriz, öyle ki

$$\langle\vec{s}_1|T|\vec{s}_2\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha\langle\vec{s}_1|\alpha\rangle\langle\alpha|\vec{s}_2\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha(\vec{s}_1)f^*_\alpha(\vec{s}_2) \tag{18}$$

Kuantum mekaniğindeki düzlem dalgaların incelenmesinden, skalar çarpımın üstelinin küresel harmoniklar $Y_{\ell m}$ cinsinden yazılabileceğini hatırlayabilirsiniz. Özel olarak

$$e^{K\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} 4\pi i^\ell j_\ell(-ik)Y^*_{\ell m}(\vec{s}_1)Y_{\ell m}(\vec{s}_2) \tag{19}$$

tam olarak denklem 18 şeklindedir, ki buradan özdeğerleri $\lambda_{\ell m}(k) = 4\pi i^\ell j_\ell(-ik)$, ki m'ye bağlı değildir, olarak okuyabiliriz. Bölüşüm fonksiyonu, şimdi

$$Z = \text{İz}T^N = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\lambda^N_{\ell m} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\lambda^N_\ell \approx \lambda^N_0 \tag{20}$$

olarak verilir, burada $\lambda_0 = 4\pi j_0(-ik) = 4\pi \sinh K/K$ en büyük özdeğerdir. Bir sonraki en büyük özdeğer, 3 katlı yozlaşmıştır, ve $\lambda_1 = 4\pi j_1(-ik) = 4\pi\left[\cosh K/K - \sinh K/K^2\right]$ olarak verilir.

---

1. *Spin-1 modeli:* Her konumundaki spinin üç değer $s_i = -1,\ 0,\ +1$ alabildiği doğrusal bir zincir düşünelim. Spinler

$$-\beta\mathcal{H}\sum_i K s_i s_{i+1}$$

Hamiltoniyeni ile etkileşsinler.
(a) $\langle s|T|s'\rangle = e^{Kss'}$ aktarma matrisini açıkça yazın.
(b) Simetri özelliklerini kullanarak, T'nin en büyük özdeğerini bulunuz, ve buradan konum başına serbest enerjiyi $(\ln Z/N)$ elde edin.
(c) Bağdaşma uzunluğu ξ için bir ifade elde edin, ve $K \to \infty$ iken davranışına dikkat edin.
(d) Yukarıdaki zinciri kırıma uğratarak renormalizasyon gurubu uygularsak, ek etkileşimlerin yaratıldığını görürüz. $\beta\mathcal{H}$ için, parametre uzayı RG altında kapalı olan en basit genelleştirmeyi yazın.

****

2. *Saat Modeli:* Ağ üzerindeki her konumda, temelinde q modüllü öteleme simetrisi olan q değerli $s_i \equiv 1, 2, \cdots, q$ spinleri vardır, yani sistem, $s_i \to (s_i + n)_{\text{mod q}}$ altında değişmez. Bu simetriye sahip, en yakın komşu etkileşimli en genel Hamiltoniyen

$$\beta\mathcal{H}_S = -\sum_{<i,j>} J(|s_i - s_j|_{\text{modq}})$$

burada $J(n)$ herhangi bir fonksiyondur, mesela $J(n) = J\cos(2\pi n/q)$. *Potts modelleri*, Saat modellerinin, tam *yerdeğiştirme simetrisi*ne sabip özel bir durumudur, ve İsing modeli $q = 2$ limitinde elde edilir.
(a) Yukarıdaki Hamiltoniyene tabi olan, N saat spininden oluşmuş kapalı bir zincir için, bölüşüm fonksiyonunu $Z = \text{İz}\left[\exp(-\beta\mathcal{H})\right]$,

$$Z = \text{İz}\left[\langle s_1|T|s_2\rangle\langle s_2|T|s_2\rangle\cdots\langle s_N|T|s_1\rangle\right]$$

olarak yazılabilir, burada $T \equiv \langle s_i|T|s_j\rangle = \exp\left[J(s_i - s_j)\right]$, $q \times q$'luk aktarma matrisidir.
(b) Aktarma matrisini açıkça yazın, ve köşegenleştirin. $n$inci derece seküler denklemi çözmeniz gerekmediğine dikkat edin; çünkü öteleme simetrisinden dolayı, özdeğerler kesikli Fourier dönüşümü ile

$$\lambda(k) = \sum_{n=1}^{q} \exp\left[j(n) + \frac{2\pi i n k}{q}\right]$$

olarak kolayca elde edilebilir.
(c) $N \to \infty$ iken $Z = \sum_{k=1}^{q} \lambda(k)^N \approx \lambda(0)^N$ olduğunu gösterin. Konum başına serbest enerji $\beta f = -\ln Z/N$ için bir ifade yazın.

(d) Bağdaşıklık fonksiyonunun

$$\langle \delta_{s_i, s_{i+\ell}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\alpha=1}^{q} \text{İz}\left[\Pi_\alpha T^\ell \Pi_\alpha T^{N-\ell}\right]$$

burada Π_α projeksiyon matrisidir, ifadesinden elde edilebileceğini gösteriniz. Buradan, $\langle \delta_{s_i, s_{i+\ell}} \rangle_c \sim [\lambda(1)/\lambda(0)]^\ell$ olduğunu gösterin. (Orantı sabitini açıkça hesaplamanız gerekmez.)

****

3. *XY modeli:* Tek boyutta, iki bileşenli, $-\beta\mathcal{H} = K\sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1}$ Hamiltoniyeni ile etkileşen, iki bileşenli birim spinleri $\vec{s}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ düşünün.
(a) $\langle\theta|T|\theta'\rangle$ aktarma matrisini yazın, ve tamsayı m için, $f_m(\theta) \propto e^{im\theta}$ özdeğerleri ile köşegenleştirilebileceğini gösterin.
(b) Konum başına serbest enerjiyi hesaplayın, ve ısı sığasının $T \propto K^{-1} \to 0$ için davranışını yorumlayın.
(c) Bağdaşma uzunluğunu ξ bulun, ve $K \to \infty$ için davranışına dikkat edin.

****

4. (Seçmeli) *Tek boyutlu gaz:* Aktarma matrisi yöntemi, bu problemde anlatıldığı gibi, kısa erimli etkileşimleri olan, tek boyutlu parçacık gazına da uygulanabilir.
(a) Etkileşimleri daha uzaktaki komşulardan perdeleyen sert çekirdekli bir potansiyel için, N parçacığın Hamiltoniyeninin

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}(x_i - x_{i-1})$$

olduğunu gösterin. (Ayırt edilemez) parçacıklar, $\{x_i\}$ koordinatları ile işaretlenmiştir, öyle ki

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N \leq L$$

burada L, parçacıkları kapsayan kutunun uzunluğudur.
(b) $Z(T, N, L)$ bölüşüm fonksiyonu için ifadeyi yazın. Değişkenleri $\delta_1 = x_1, \delta_2 = x_2 - x_1, \cdots \delta_N = x_N - x_{N-1}$ olarak değiştirin, ve integral bölgelerini ve koşulları belirtin.
(c) Laplace dönüşümü sonucu elde edilen Gibbs bölüşüm fonksiyonunu düşünün

$$\mathcal{Z}(T, N, P) = \int_0^\infty \exp(-\beta PL) Z(T, N, L)$$

ve integrali edilen ifadenin uç noktalarını bularak, P'nin kanonik topluluktaki standart formülünü bulun.
(d) Değişkenleri L'den $\delta_{N+1} = L - \sum_{i=1}^{N} \delta_i$'ye değiştirin, ve $\mathcal{Z}(T, N, P)$ için, her δ_i üzerinden tek boyutlu integrallerin çarpımı cinsinden bir ifade bulun.
(e) Sabit bir basınçta P, ortalama uzunluk $L(T, N, P)$ ve yoğunluk $n = N/L(T, N, P)$ için bir ifade bulun (basitçe yorumlanabilecek integrallerin oranlarını içeren).

(e) bölümündeki $n(T, P)$ için ifade, herhangi bir potansiyel tercihi için sürekli ve tekilliksizdir, gerçekten, tek boyutlu gaz için yoğuşma geçişi yoktur. Karşıt olarak, yaklaşık van der Waals denklemi (yada ortalama alan yöntemi), yanlış bir şekilde, böyle bir geçiş öngörür
(f) Parçacıklar arası en kısa mesafenin a olduğu, sert küre gazı için, $P(T, n)$ durum denklemini hesaplayın. Dışlanmış hacim çarpanını, önceki problemlerde elde edilen yaklaşık sonuçla kıyaslayın, ve genel $B_\ell(T)$ viriyal katsatısını elde edin.

****

5. *Potts zinciri (RG):* N Potts spininden $s_i = 1, 2, \cdots, q$ oluşan ve $-\beta\mathcal{H} = J\sum_i \delta_{s_i, s_{i+1}}$ Hamiltoniyenine tabi tek boyutlu bir dizi düşünün
(a) Aktarma matrisi yöntemini kullanarak (veya başka şekilde), bölüşüm fonksiyonunu Z, ve bağdaşıklık uzunluğunu ξ hesaplayın.
(b) Antiferromanyetik çiftlenimler için $J < 0$, sistem sıfır sıcaklıkta kritik midir?
(c) Her iki spinden birini kaldırarak, renormalizasyon gurubu (RG) yöntemini elde edin. J çiftlenimi için, ve eklemeli g sabiti için yineleme bağıntılarını yazın.
(d) Sabit noktaları, ve kararlılıklarını tartışın.
(e) $\ln Z$ için olan ifadeyi, arka arkaya ölçeklemedeki eklemeli sabitler cinsinden yazın.
(f) Yineleme bağıntılarının, $t(J) \equiv e^{-1/\xi(J)}$ cinsinden yazıldığında sadeleştiğini gösteriniz.
(g) (f)'deki sonucu kullanarak, (e)'deki seriyi t cinsinden ifade edin. Cevabın,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{1+t^{2^n}}{1-t^{2^n}}\right) = -\ln(1-t)$$

sonucunu kullanarak, (a)'da elde edilene indirgenebileceğini gösterin.
(h) (c) bölümündeki RG hesabını, simetriyi kıran küçük $h\sum_i \delta_{s_i,1}$ terimini $-\beta\mathcal{H}$ Hamiltoniyenine ekleyerek tekrarlayın. Ek bir $K\sum_i \delta_{s_i,1}\delta_{s_{i+1},1}$ çiftlenim teriminin RG altında yaratıldığını bulacaksınız. (J, K, h) üç parametre uzayında yineleme bağıntılarını hesaplayın.
(i) Manyetik özdeğerleri $J \to \infty$ olan sıfır sıcaklık sabit noktasında hesaplayın, ve sıfır noktası yakınında bağdaşıklık uzunluğunu elde edin.

****

6. *Küme RG: Altıgen ağ*da, en yakın komşu etkileşimi J olan İsing spinlerini düşünün.
(a) Konumları, $b = 2$ olan konum uzayı renormalizasyonuna hazırlık olarak, dörtlü kümelere guruplayın.
(b) Çoğunluk kuralı, her kümenin spinini tanımlamak için nasıl değiştirilebilir?
(c) Merkez konumun, eşitlik bozucu olarak seçildiği bir şemada, belirli bir küme spini için, bütün olası konum spinlerinin bir tablosunu oluşturun.
(d) Bir çift komşu kümeye odaklanın. Küme içi ve kümeler arası bağların, toplam enerjiye katkısını belirtin.
(e) Sıfır manyetik alanda, paralel ve anti-paralel kümelerin Boltzmann ağırlıklarının

$$R(+,+) = x^8 + 2x^6 + 7x^4 + 14x^2 + 17 + 14x^{-2} + 7x^{-4} + 2x^{-6}$$

ve

$$R(+,-) = 9x^4 + 16x^2 + 13 + 16x^{-2} + 9x^{-4} + x^{-8}$$

olduğunu gösterin, burada $x = e^J$.
(f) Elde edilen $J'(J)$ yineleme bağıntısı için bir ifade bulun.
(g) Kritik *ferromanyetik* çiftlenimini J_c ve bu RG şemasından elde edilen ν üstelini tahmin edin.
(h) Manyetik ve termal üstellerinin (y_h, y_t), sıfır sıcaklık ferromanyetik sabit noktadaki değerleri nedir?
(i) Yukarıdaki şema, anti-ferromanyetik etkileşimler için de uygulanabilir mi? Bu dönüşüm, ilk problemin hangi simetrisine uymaz?

****

7. (Seçmeli) *Geçiş olasılığı matrisi:* K çiftlenimli iki İsing spininden oluşan bir sistemi düşünün, dolayısıyla dört farklı durumda olabilir.
(a) Metropolis algoritması için, tek bir spinin yön değiştirmesine karşılık gelen 4×4'lük geçiş matrisini açıkça yazın. Denge ağırlıklarının, gerçekten de bu matrisin sol özvektörüne karşılık geldiğini gösterin.
(b) Yukarıdaki alıştırmayı, hem tek spinin hem iki spinin yön değiştirmesine izin verildiği durumda tekrarlayın. İki türlü hareket, p ve $q = 1 - p$ olasılıkları ile rastgele seçilir.

****