8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Eşleklik: Potts modelleri & Süzülme

1. *Eşleklikten Enerji:* Kare ağdaki, $-\beta\mathcal{H} = K\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j$ olan, İsing modelini ($\sigma_i = \pm 1$) düşünün.
(a) Serbest enerji için eşleklik ifadesinden başlayarak, iç enerji $U(K) = \langle K \rangle = -\partial \ln Z/\partial \ln K$ için benzer bir ifade çıkarın.
(b) (a)'yı kullanarak, U'nun kritik noktadaki K_c tam değerini hesaplayın.

****

2. *Saat modeli eşlekliği:* Kare bir ağa yerleştirilmiş, saat modeli Hamiltoniyeni

$$\beta\mathcal{H}_S = -\sum_{<i,j>} J(|(s_i - s_j)_{\text{modq}}|)$$

ile etkileşen $s_i = (1, 2, \cdots, q)$ spinlerini düşünün.
(a) N konum değişkeninden, $2N$ bağ değişkenine, $b_{ij} = s_i - s_j$, geçin. Değişkenlerin sayısındaki değişim, her plaketin (temel kare) etrafındaki dört bağ değişkeninin toplamının mod q'da sıfır olması koşuluyla açıklanabilir.
(b) Koşullar, her plaket için "delta fonksiyonları" ekleyerek uygulanabilir:

$$\delta\left[S_p\right]_{\text{mod q}} = \frac{1}{q}\sum_{n_p=1}^{q} \exp\left[\frac{2\pi i n_p S_p}{q}\right].$$

Bütün bağ değişkenleri üzerinden toplanarak, bölüşüm fonksiyonu eşlek değişkenler üzerinden

$$Z = q^{-N}\sum_{\{n_p\}}\prod_{\langle p,p'\rangle}\lambda(n_p - n_{p'}) \equiv \sum_{\{n_p\}}\exp\left[\sum_{\langle p,p'\rangle}\tilde{J}(n_p - n_{p'})\right]$$

olarak yazılabilir, burada $\lambda(k)$, $e^{J(n)}$'nin kesikli Fourier dönüşümüdür.
(c) Potts modelinin etkileşme parametresinin eşleğini hesaplayın, ve buradan $J_c(q)$ kritik noktasını bulun.
(d)

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{x,y}\left(J_x\delta_{s_{x,y},s_{x+q,y}} + J_y\delta_{s_{x,y},s_{x,y+1}}\right)$$

Hamiltoniyeni ile verilen, eşyönsüz Potts modelinin, yani x ve y yönünde farklı kuvvetli bağları olan, eşleğini oluşturun. (J_x, J_y) düzleminde, özeşlek etkileşimlerin oluşturduğu doğruyu bulun.

****

3. *Üçgensel/altıgen ağ İsing modeli:* Herhangi bir düzlemsel bağ ağı için, komşu plaketlerin merkezlerini bağlayarak, geometrik bir eşleğini tanımlayabiliriz. Eşlek ağın her bir bağı, ilk ağın bir bağını keser, böylece *yerel* bir eşleşme tanımlayabiliriz. Açıkça, üçgen ağın eşleği, altıgen (veya arı kovanı) ağıdır, ve tersi de doğrudur.
(a) K_h enyakın komşu etkileşim kuvvetli, altıgen bir ağ üzerindeki İsing modelini düşünün. Altıgen ağın *iki parçalı* olduğuna dikkat edin, yani iki alt ağa ayrılabilir. Bölüşüm fonksiyonunda,

bir alt ağ üzerindeki bütün spinler üzerinden kısmı bir toplam alın. Kalan spinlerin, $K_t(K_H)$ en yakın komşu etkileşimli üçgen bir ağ oluşturduğunu gösterin. (Bu *yıldız-üçgen dönüşümü* olarak bilinir.)

(b) Üçgen İsing modelinin eşleğinin, herzamanki eşleklik bağıntısını, $\tilde{K}(K)$, sağlayan altıgen İsing modeli olduğunu gösterin.

(c) Önceki sonuçları birleştirerek, üçgensel ve altıgen ağların K_t^* ve K_h^* kritik çiftlenimlerini hesaplayınız.

****

4. *Üçgensel/altıgen ağ Potts modeli:* Bir önceki problemin adımları, genel Potts modeli için tekrarlanabilir.

(a) Altıgen bir ağda, $K_h\delta_{s_i,s_j}$ en yakın komşu etkileşimli Potts spinlerini ($s_i = 1, 2, \cdots, q$) düşünün. Yıldız-üçgen kırımını uygulayarak, kalan spinlerin $K_t(K_h)$ en yakın etkileşimli, *ve* üç spin etkileşimli $L(K_h)$ üçgensel bir ağ oluşturduğunu gösterin. İsing modelinde L niye yoktur?

(b) Üçgensel ağ üzerindeki Potts modelin eşleği nedir?

(c) **(Seçmeli)** Açıkça, ek etkileşimlerden dolayı model özeşlek değildir. Yinede, $\tilde{K}_t(K_c) = K_c$ olacak şekilde kritik üsteli belirleyin. Sonra, $L(K_c) = 0$ olduğunu kontrol edin, yani model genel olarak özeşlek olmadığı halde, tam kritiklikte, özeşlektir, böylece $K_c(q)$'nun tam değeri elde edilir.

****

Süzülme

Sıvılar, delik yoğunluğu az olan katılardan geçemezler. Ancak, eşik bir yoğunlukten sonra, delikler üst üste biner, ve sıvı birbirine bağlantılı malzeme içinden *süzülebilir. Süzülme* klasik bir *geometrik* faz geçişidir, ve pek çok kırılma veya başarısızlık sürecininde kullanılmıştır. Esnek bir ağda katılığın kaybolması, direnç ağlarının iletkenliği, seyreltilmiş mıknatıslardaki mıknatıslanma bir kaç örnektir.

Süzülmenin basit modellerinde, ağın elemanları (konumlar veya bağlar) birbirinden bağımsız bir şekilde p olasılığıyla doludur. Bir küme, bu dolu elemanların birbirine bağlanmış (komşu bağlarla) topluluğu olarak tanımlanmıştır. Küçük p için, sadece küçük kümler vardır, ve aralarında r mesafesinin olduğu iki konumun birbiri ile bağlantılı olma olasılığı $\exp(-r/\xi)$ olarak azalır. Bağdaşıklık uzunluğu $\xi(p)$ artan p ile artar, ***süzülme eşiğinde*** p_c, $\xi(p) \sim |p_c - p|^{-\nu}$ olarak ıraksar. Sonsuz bir küme, ilk olarak bu eşikte ortaya çıkar, ve bütün $p > p_c$ için, (sonsuz) sistemin içinde süzülür. Düzen parametresinin benzeri, herhangi bir konumun bu sonsuz kümeye ait olma olasılığıdır, $P(p)$. p_c'ye yukarıdan yaklaşırken, $P(p) \sim |p_c - p|^{\beta}$ olarak yok olur. p_c'nin değeri, modelin detaylarına bağlı olmakla beraber, β ve ν *evrenseldir*, sadece uzamsal d boyutu ile değişir.

Takip eden problemlerde, *bağ* süzülmesine odaklanacağız, yani p, ağ üzerinde bir bağın dolu olma olasılığını gösterir.

5. Süzülmede, *eşlekliğin* çok doğal bir yorumu vardır: Bir bağ dolu ise, eşleği boştur, ve tersi.

Dolayısıyla, eşlek bağların dolu olma olasılığı $\tilde{p} = 1 - p \equiv q$ olur. Tanımı gereği, orijinal ve eşlek elemanlar kesişmedikleri için, biri veya öteki sistem içinde süzülür.
(a) N bağın *seri* bağlı olduğu bir zincirin eşleği, *paralel* bağlı N bağdır. Karşılık gelen süzül*me*me olasılığı nedir?
(b) Kare ağdaki bağ süzülme problemi özeşlektir. Eşik p_c değeri nedir?
(c) Üç boyutta bağ süzülmesi, plaket süzülmesine eşlektir. $d = 3$'te, katı bütünlüğünü korurken, süzülmek mümkün müdür?

****