MIT Açık Ders Malzemesi
http://ocw.mit.edu

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için
http://ocw.mit.edu/terms ve http://tuba.acikders.org.tr sitelerini ziyaret ediniz.

Tekrar Problemleri

Test, 'kapalı kitaptır,' ancak isterseniz, tek-taraflı formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

****

1.*İkili alaşım:* İkili bir alaşım (β pirinç alaşımı gibi), N_A tane A tipi atomdan, ve N_B tane B tipi atomdan oluşmaktadır. Atomlar basit kübik bir ağ oluşturmaktadırlar, her biri altı en yakın komşusuyla etkileşir. Benzer atomlar $A-A$ ve $B-B$ arasında çekici bir enerji $-J$ ($J>0$), ama $A-B$ çifti için itici bir enerji $+J$ varsayın.

(a) En düşük enerjili dizilim, veya sistemin sıfır sıcaklıktaki durumu, nedir?

(b) Atomların N konum'da rastgele dağıldıklarını varsayarsak, yani her konum bağımsız olarak $p_A = N_A/N$ ve $p_B = N_B/N$ olasılıklarıyla doldurulmuştur, toplam etkileşme enerjisini tahmin edin.

(c) Aynı yakınlaştırmayla, karışım entropisini tahmin edin. $N_A, N_B \gg 1$ olduğunu varsayın

(d) Yukarıdakini kullanarak, serbest enerji fonksiyonunu $F(x)$ elde edin, burada $x = (N_A - N_B)/N$. $F(x)$'i x'de dördüncü mertebeye kadar açın, ve F'in iç bükeylik koşulunun, bir T_c kritik sıcaklık altında geçersiz olduğunu gösterin. Bu problemin kalanında, (d)'de elde edilen açılımı, tam $F(x)$ yerine kullanın

(e) $F(x)$'i $T > T_c$, $T = T_c$ ve $T < T_c$ için kabataslak çizin. $T < T_c$ için, $F(x)$'in iç bükey olmadığı bir karışım bölgesi $x < |x_{sp}(T)|$ vardır, ve sonuç olarak karışım yerel olarak karasızdır. $x_{sp}(T)$'yi bulun.

(f) Alaşım, bileşimleri $\pm x_{de}(T)$ olan A zengin ve B zengin fazlara ayrışarak serbest enerjisini genel olarak minimize eder, burada $x_{de}(T)$, $F(x)$'in en küçük değerini aldığı noktadır. $x_{de}(T)$'yi bulun.

(g) (T, x) düzleminde, $\pm x_{de}(T)$ faz ayırım sınırını kabataslak çizin; ve spinodal çizgi denen $\pm x_{sp}(T)$'yi. (Spinodal çizgi, yarı istikrarlılığın ve histerisis etkilerinin başlamasını işaret eder.)

****

2. *Mıknatıslanmanın İsing Modeli:* Bazen bir elektronun kristaldeki yerel çevresi, spinini belli bir ağ yönüne paralel veya anti paralel olmaya zorlar. Böyle modellerdeki bir mıknatıslanma modeli olarak, spinin yününü tek bir değişkenle $\sigma_i = \pm 1$ (bir İsing spini) ile göstereceğiz. $\{\sigma_i\}$ diziliminin enerjisi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \sigma_i \quad ;$$

ile verilir, burada h harici bir manyetik alan, ve J_{ij} ise i ve j konumlarındaki spinlerin etkileşme enerjisidir.

(cc) BY-NC-SA

(a) N spin için, büyük bir *yaklaştırma* yapacağız ve bütün spinler için etkileşmenin aynı olduğunu varsayacağız,ve $J_{ij} = -J/N$ (özdeş komşu modeli). Şimdi enerjinin, mıknatıslanma $m = \sigma_{i=1}^{N}\sigma_i/N = M/N$ ile $E(M,h) = -N\left[Jm^2/2 + hm\right]$ olarak yazılabileceğini gösterin.
(b) Bölüşüm fonksiyonunun, $Z(h,T) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta\mathcal{H})$, problem (1)'dekine benzer bir şekilde kolayca hesaplanabilen bir $F(m,h)$ cinsinden, $Z = \sum_M \exp\left[-\beta F(m,n)\right]$ şeklinde yeniden yazılabileceğini gösteriniz. Problemin geri kalanında sadece $F(m,h)$'in m'de 4'üncü mertebeya kadar açılımını kullanın.
(c) Semer noktası integrali ile, gerçek serbest enerjinin, $F(h,T) = -kT\ln Z(h,T)$, $F(h,T) = \min\left[F(m,h)\right]_m$ olarak verildiğini gösterin. Semer noktası yöntemi ne zaman geçerlidir? $F(m,h)$'nin analitik ama $T < T_c$ için iç bükey olmayan bir fonksiyonken gerçek serbest enerji $F(h,T)$'nin içbükey ancak en küçük değerini almaktan dolayı analitik olmayan bir fonksiyon olduğuna dikkat edin.
(d) $h = 0$ için, daha düşük sıcaklıklarda kendinden mıknatıslanmanın ortaya çıktığı kritik sıcaklığı T_c bulun; ve düşük sıcaklık fazında $\bar{m}(T)$ mıknatıslanmayı hesaplayın.
(e) Tepki fonksiyonlarının tekil (analitik olmayan) davranışlarını hesaplayın

$$C = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{h=0}, \quad \text{ve} \quad \chi = \left.\frac{\partial \bar{m}}{\partial h}\right|_{h=0}$$

****

3. *Ağ-Gazı Modeli:* Aşağıdaki Hamiltoniyene tabi parçacıklardan oluşan gazı düşünün:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad \text{V hacmi içinde}$$

(a) Büyük bölüşüm fonksiyonunun

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}\left(\frac{e^{\beta\mu}}{\lambda^3}\right)^N \int \prod_{i=1}^{N} d^3\vec{r}_i \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{i,j}\mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right]$$

olarak yazılabileceğini gösteriniz.
(b) V hacmi, hacmi a^3 olan $\mathcal{N} = V/a^3$ kısma bölünmüştür, öyle ki a aralığı, her α hücresi ya boş ya da tek bir parçacık tarafından doldurulabilecek kadar küçük seçilmiştir; yani hücre doluluk sayısı n_α, 0 veya 1 ile sınırlanmıştır ($\alpha = 1,\ 2,\ \cdots, \mathcal{N}$). $\int d^3\vec{r}$ integrallerini $a^3\sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}}$ toplamları ile yaklaştırdıktan sonra,

$$\Xi \approx \sum_{\{n_\alpha=0,1\}} \left(\frac{e^{\beta\mu}a^3}{\lambda^3}\right)^{\sum_\alpha n_\alpha} \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathcal{N}} n_\alpha n_\beta \mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)\right]$$

olduğunu gösterin.
(c) $n_\alpha = (1+\sigma_\alpha)/2$ alarak, ve potansiyeli $\mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = -J/\mathcal{N}$ olarak yaklaştırarak, bu modelin

problem (2)'de incelenen ile özdeş olduğunu gösterin. Bu, mükemmel olmayan gazın davranışı ile ilgili ne söyler?

****

4. *Yüzey Aktif Madde Yoğuşması:* N tane yüzey aktif molekül, suyun yüzeyinde A alanına eklenmiştir. Tabi oldukları Hamiltoniyen

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

olarak verilir, burada $\vec{r}_i$ ve $\vec{p}_i$, i'inci parçacığın konum ve momentumunu gösteren iki boyutlu vektörlerdir.
(a) $Z(N,T,A)$ bölüşüm fonksiyonunun ifadesini, $\vec{r}_i$ ve $\vec{p}_i$ üzerinden integraller cinsinden yazın, ve momentumlar üzerinden integralleri alın.

Parçacıklar arası potansiyel $\mathcal{V}(\vec{r})$, $|\vec{r}| < a$ aralıkları için sonsuz ve $|\vec{r}| > a$ için çekicidir, öyle ki $\int_a^\infty 2\pi r dr \mathcal{V}(r) = -u_0$
(b) N parçacık sisteminin konum faz uzayında mevcut, dışlanmamış toplam alanı tahmin edin.
(c) Sistemin toplam *potansiyel* enerjisini, yoğunluğunun $n = N/A$ *düzgün* olduğunu varsayarak, tahmin edin. Bir önceki kısımda izin verilen bütün dizilimler için bu potansiyeli kullanarak, Z için bir yaklaştırma yazınız.
(d) Yüzey aktif maddelerin olmadığı durumda, suyun yüzey gerilimi, yaklaşık olarak sıcaklıktan bağımsız olarak, σ_0'dır. Yüzey aktif maddelerin olduğu durumda, $\sigma(n,T)$ yüzey gerilimini hesaplayınız.
(e) Belli bir sıcaklığın altında, T_c, σ için ifadenin açıkça yanlış olduğunu gösteriniz. Düşük sıcaklıklarda ne olduğunu düşünüyorsunuz?
(f) Isı sığalarını, C_A, hesaplayınız ve yüzey aktif maddeden kaynaklı C_σ için, açıkça hesaplamadan, bir ifade yazınız.

****

5. *Üçüncü derece değişmezler:* Düzen parametresi m, süreksiz olarak sıfıra giderse, faz geçişinin birinci derece (süreksiz) olduğu söylenir. Sıkça rastlanılan bir örnek, simetrilerin, Landau serbest enerjisinde üçüncü derece bir terimi dışlamadığı durumda görülür:

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + cm^3 + um^4\right] \quad (K,\ c,\ u > 0)$$

(a) Semer noktası yaklaşımında, düzgün m için, değişik t değerlerinde, $\Psi(m)$ enerji yoğunluğunu çizerek, t azaltılırken, pozitif bir $\bar{t}$ değerinde, $\bar{m} \neq 0$'a süreksiz bir atlama olduğunu gösterin.
(b) Geçişte, $\bar{m}$ ve $\bar{t}$'nin sağlaması gereken iki koşulu da yazarak, $\bar{m}$ ve $\bar{t}$ için çözün.
(c) Bağdaşıklık uzunluğunun ξ, $\Psi(m)$'in en küçük değerindeki yuvarlaklığına $K\xi^{-2} = \partial^2\Psi/\partial m^2|_{de}$ şeklinde bağlı olduğunu hatırlayın. ξ'i, t'nin fonksiyonu olarak çizin.

BY-NC-SA

****

6. *Üçlü Kritik Nokta:* Ek bir parametreyi ayarlayarak, ikinci derece bir geçiş, birinci derece yapılabilir. İki tür geçişi birbirinden ayıran nokta üçlü kritik nokta olarak bilinir, ve Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini inceleyerek araştırılabilinir

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + um^4 + vm^6 - hm\right]$$

burada u pozitif de olabilir negatif de. $u > 0$ için, kararlılığı sağlamak için pozitif bir v gereklidir.
(a) $\Psi(m)$ enerji yoğunluğunu, çeşitli t değerlerinde, kabataslak çizerek, semer noktası yaklaşımında, $u < 0$ ve $h = 0$'da birinci derece bir geçiş olduğunu gösterin.
(b) Bu geçişte $\bar{t}$'yi ve $\bar{m}$'deki süreksizliği hesaplayın.
(c) $h = 0$ ve $v > 0$ için, (u, t) düzleminde faz sınırını, fazları ve faz geçişlerinin derecesini belirleyerek, çizin.
(d) $u = t = 0$ özel noktası, ki birinci ve ikinci derece faz geçişlerini ayırır, bir *üçlü kritik nokta*dır. $u = 0$ için, mıknatıslanma, alınganlık ve ısı sığasındaki tekillikleri kontrol eden üçlü kritik üstelleri β, δ, γ ve α'yı hesaplayınız. (Hatırlatma: $C \propto t^{-\alpha}$; $\bar{m}(h = 0) \propto t^{\beta}$; $\chi \propto t^{-\gamma}$; ve $\bar{m}(t = 0) \propto h^{1/\delta}$.)

****

7. *Enine Alınganlık:* n bileşenli bir mıknatıslanma alanı $\vec{m}(\mathbf{x})$, $\beta\mathcal{H}$ Hamiltoniyenindeki $-\int d^d\mathbf{x}\vec{h}\cdot\vec{m}(\mathbf{x})$ terimi ile harici bir alana, $\vec{h}$, çiftlenmiştir. Eğer $\vec{h} = 0$'daki $\beta\mathcal{H}$, $\vec{m}(\mathbf{x})$'in dönmeleri altında değişmez ise serbest enerji yoğunluğu ($f = -\ln Z/V$), sadece $\vec{h}$'nin mutlak değerine bağlıdır, yani $f(\vec{h}) = f(h)$, burada $h = |\vec{h}|$.
(a) $m_\alpha = \langle\int d^d\mathbf{x} m_\alpha(\mathbf{x})\rangle/V = -h_\alpha f'(h)/h$ olduğunu gösteriniz.
(b) Alınganlık tensörü $\chi_{\alpha\beta} = \partial m_\alpha/\partial h_\beta$ ile $f''(h)$,$\vec{m}$, ve $\vec{h}$ arasında bağıntı bulunuz.
(c) Enine ve boyuna alınganlıkların $\chi_e = m/h$ ve $\chi_b = -f''(h)$ olarak verildiğini gösteriniz, burada m, $\vec{m}$'nin genliğidir.
(d) Ne zaman kendiliğinden mıknatıslanma varsa, χ_e'nin $\vec{h} \to 0$ iken ıraksadığı sonucunu çıkarınız. χ_b'nin ıraksaması için önsel herhangi bir sebep var mı?

****

8. *Spin dalgaları:* $n = 2$ mıknatıslanmanın XY modelinde, d boyutlu bir ağın her konumuna bir birim vektör $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ($s_x^2 + s_y^2 = 1$) yerleştirilmiştir. En yakın komşuların spinlerini paralel tutmaya çalışan bir etkileşim vardır, yani

$$-\beta\mathcal{H} = K\sum_{<ij>}\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j$$

Hamiltoniyeni. $< ij >$ gösterimi sıklıkla bütün *en yakın komşu* çiftleri (i, j) üzerinden toplamı göstermek için kullanılır.
(a) $Z = \int\prod_i d\vec{s}_i \exp(-\beta\mathcal{H})$ bölüşüm fonksiyonunu, $\{\vec{s}_i\}$ spinleri ile herhangi bir eksen

BY-NC-SA

arasındaki $\{\theta_i\}$ açıları üzerinden integral olarak yeniden yazın.
(b) Düşük sıcaklıklarda ($K \gg 1$), $\{\theta_i\}$ açıları konumdan konuma yavaşça değişirler. Bu durumda, $-\beta\mathcal{H}$'i, $\{\theta_i\}$'de ikinci derece bir terim elde etmek için açın.
(c) $d=1$ için, tekrarlanan sınır koşullu L konum (yani kapalı bir zincir oluşturuyorlar) düşünün. İkinci dereceden ifadeyi köşegenleştiren normal modları θ_q (Fourier dönüşümü kullanarak) ve karşılık gelen özdeğerleri $K(q)$ bulun.
(d) Bir önceki kısımdaki sonuçları, d boyutlu, tekrarlanan sınır koşullu basit kübik ağa genelleştirin.
(e) Bu modların serbest enerjiye ve ısı sığasına katkılarını hesaplayın. (*Klasik* bölüşüm fonksiyonunu hesaplayın, yani modları kuantize etmeyin.)
(f) $\langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{x}} \rangle = \Re\langle \exp[i\theta_{\mathbf{x}} - i\theta_0] \rangle$ için bir ifadeyi, farklı Fourier modlarının katkılarını ekleyerek bulun. Kendinizi $|\mathbf{x}| \to 0$ iken, sadece $\mathbf{q} \to \mathbf{0}$ olan modların kayda değer katkılar verdiğine ikna edin, ve bundan asimptotik limiti hesaplayın.
(g) Enine alınganlığı $\chi_e \propto \int d^d\mathbf{x} \langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{x}} \rangle_c$ ifadesinden hesaplayın. Sistem boyutu L'ye nasıl bağlıdır?
(h) $d = 2$'de, χ_e'nin sadece K'nın belirli bir kritik değerden, $K_c = 1/(4\pi)$, büyük olması durumunda ıraksadığını gösteriniz.

****

9. *Kılcal Dalgalar:* d boyutta, makul düzeyde düz bir yüzey, h yüksekliği ile, geri kalan $d-1$ tane koordinatın $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{d-1})$ fonksiyonu olarak tarif edilebilir. Genelleştirilmiş alanın $\mathcal{A} = \int d^{d-1}\mathbf{x}\sqrt{1+(\nabla h)^2}$ şeklinde yazılabileceğine kendinizi ikna ediniz. σ yüzey gerilimi ile, Hamiltoniyen basitce $\mathcal{H} = \sigma\mathcal{A}$ olur.
(a) Yeterince düşük sıcaklıklarda, h'nin sadece yavaş değişimleri vardır. Enerjiyi ikinci dereceye kadar açın, ve bölüşüm fonksiyonunu yol integrali olarak yazın.
(b) İkinci dereceden Hamiltoniyeni, normal modları $\{h_{\mathbf{q}}\}$ (kılcal dalgalar) cinsinden köşegenleştirmek için, Fourier dönüşümünü kullanın.
(c) Bu Goldstone modları için hangi simetri kırılması sorumludur?
(d) Yükseklik-yükseklik bağdaşıklıklarını hesaplayın $\langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}'))^2 \rangle$
(e) (d)'deki sonucu $d = 4,\ 3,\ 2$ ve 1'de yorumlayın
(f) ∇h için tipik değerleri tahmin ederek, $\mathcal{A}$'nın açılımındaki daha yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesinin haklı olup olmadığını yorumlayın.

****

10. *Süperiletkenlerde Ayar Salınımları:* Süperiletkenliğin Landau-Ginzburg modeli

$$\beta\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{t}{2}|\Psi|^2 + u|\Psi|^4 + \frac{K}{2} D_\mu \Psi D_\mu^* \Psi^* + \frac{L}{2}(\nabla \times A)^2 \right]$$

Hamiltoniyenine tabi olan karmaşık bir düzen parametresi $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_1(\mathbf{x}) + i\Psi_2(\mathbf{x})$ ve elektromanyetik vektör potansiyeli $\vec{A}(\mathbf{x})$ tasvir eder. Ayar değişmez türev $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(\mathbf{x})$, iki alan

(cc) BY-NC-SA

arasındaki etkileşimi tanımlar. (Cooper çift parametreleri cinsinden, $e = e^*c/\hbar$, $K = \hbar^2/2m^*$.)
(a) Yukarıdaki Hamiltoniyenin, *yerel ayar dönüşümleri* altında değişmez olduğunu gösteriniz:

$$\Psi(\mathbf{x}) \mapsto \Psi(x)\exp(i\theta(\mathbf{x})), \quad \text{ve} \quad A_\mu(\mathbf{x}) \mapsto A_\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$$

(b) $\Psi(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}$ ve $\vec{A}(\mathbf{x}) = 0$ şeklinde bir semer noktası çözümü olduğunu gösterin, ve $t > 0$ ve $t < 0$ için $\bar{\Psi}$'i bulun.
(c) $t < 0$ için,

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}) &= (\bar{\Psi} + \phi(\mathbf{x}))\exp(i\theta(\mathbf{x})), \\ A_\mu(\mathbf{x}) &= a_\mu(\mathbf{x}), \quad \text{Coulomb ayarında } \partial_\mu a_\mu = 0 \text{ olmak üzere} \end{cases}$$

seçerek, ve $\beta\mathcal{H}$'i ϕ, θ, ve $\vec{a}$ cinsinden ikinci dereceye kadar açarak, salınımların maliyetini hesaplayınız.
(d) Fourier dönüşümü yapın, ve $\langle|\phi(\mathbf{q})|^2\rangle$, $\langle|\phi(\mathbf{q})|^2\rangle$ ve $\langle|\vec{a}(\mathbf{q})|^2\rangle$ beklenen değerlerini hesaplayın.

****

11. *Üçlü kritik nokta etrafında salınımlar:* Bir önceki problemde gösterildiği gibi,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + um^4 + vm^6\right]$$

Hamiltoniyeni $u = 0$ ve $v > 0$ ile, üçlü kritik noktayı tanımlar.
(a) Semer noktası yaklaşıklığını kullanarak, $t \to 0$ iken ısı sığası tekilliğini hesaplayın.
(b)

$$\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x}))\,\hat{e}_b + \sum_{\alpha=2}^{n}\phi_e^\alpha(\mathbf{x})\hat{e}_\alpha$$

seçerek ve $\beta\mathcal{H}$'i ikinci dereceye kadar açarak boylamsal ve enine salınımların ikisini de dahil edin.
(c) Boylamasına ve enlemesine bağdaşıklık fonksiyonlarını hesaplayın
(d) Semer noktası serbest enerjisine, salınımlardan gelen ilk düzeltmeyi hesaplayın.
(e) Isı sığasına salınım düzeltmesini bulun.
(f) (a) ve (e) bölümlerindeki sonuçları $t < 0$ *için* kıyaslayarak, Ginzburg Kriterini, ve üçlü kritik noktada ortalama-alan kuramının geçerliliği için üst kritik boyutu elde edin.
(g) Genelleştirilmiş çoklu kritik nokta, vm^6 yerine, $u_{2n}m^{2n}$ yazılarak tasvir edilebilir. Basit kuvvet saymayı kullanarak, bu çoklu kritik noktanın üst kritik boyutunu bulun.

****

(cc) BY-NC-SA