

MIT Açık Ders Malzemesi
<http://ocw.mit.edu>

8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Bu malzemeye atıfta bulunmak ve Kullanım Şartlarımızla ilgili bilgi almak için
<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitelerini ziyaret ediniz.

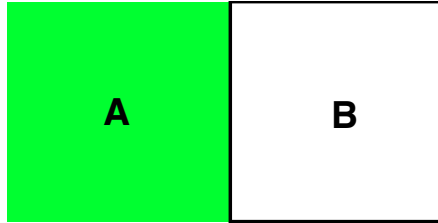
Tekrar Problemleri & Çözümleri

Test, ‘kapalı kitaptır,’ ancak isterseniz, tek-tarafli formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

1. İkili alaşım: İkili bir alaşım (β pirinç alaşımı gibi), N_A tane A tipi atomdan, ve N_B tane B tipi atomdan oluşmaktadır. Atomlar basit kübik bir ağ oluşturmaktadırlar, her biri altı en yakın komşusuyla etkileşir. Benzer atomlar $A - A$ ve $B - B$ arasında çekici bir enerji $-J$ ($J > 0$), ama $A - B$ çifti için itici bir enerji $+J$ varsayın.

(a) En düşük enerjili dizilim, veya sistemin sıfır sıcaklıktaki durumu, nedir?

- En düşük enerji diziliminin mümkün oldukça az $A - B$ bağı vardır. Dolayısıyla, sıfır sıcaklıkta, A ve B fazları ayrışır, yani aşağıda gösterildiği gibi



(b) Atomların N konum’da rastgele dağıldıklarını varsayarsak, yani her konum bağımsız olarak $p_A = N_A/N$ ve $p_B = N_B/N$ olasılıklarıyla doldurulmuştur, toplam etkileşme enerjisini tahmin edin.

- Karışmış bir durumda, ortalama enerji

$$\begin{aligned} E &= (\text{bağ sayısı}) \times (\text{ortalama bağ enerjisi}) \\ &= 2N \cdot (-Jp_A^2 - Jp_B^2 + Jp_A p_B) \\ &= -3JN \left(\frac{N_A - N_B}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

ifadesinden elde edilir.

(c) Aynı yakınlılaşmayla, karışım entropisini tahmin edin. $N_A, N_B \gg 1$ olduğunu varsayın

- N_A ve N_B parçaçığı rastgele karıştırma sayısından, karışım entropisini

$$S = k_B \ln \left(\frac{N!}{N_A! N_B!} \right)$$

olarak elde ederiz. Büyük N ’ler için, Stirling yaklaşıklığını kullanırsak, ($\ln N! \approx N \ln N - N$), yukarıdaki ifade

$$S \approx k_B (N \ln N - N_A \ln N_A - N_B \ln N_B) = -Nk_B (p_A \ln p_A + p_B \ln p_B)$$

olarak yazılabilir.

(d) Yukarıdakini kullanarak, serbest enerji fonksiyonunu $F(x)$ elde edin, burada $x = (N_A - N_B)/N$. $F(x)$ 'i x 'de dördüncü mertebeye kadar açın, ve F 'in iç büyüklük koşulunun, bir T_c kritik sıcaklık altında geçersiz olduğunu gösterin. Bu problemin kalanında, (d)'de elde edilen açılımı, tam $F(x)$ yerine kullanın

- $x = p_A - p_B$ cinsinden, serbest enerji

$$\begin{aligned} F &= E - TS \\ &= -3JNx^2 + Nk_B T \left\{ \left(\frac{1+x}{2} \right) \ln \left(\frac{1+x}{2} \right) + \left(\frac{1-x}{2} \right) \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $x = 0$ etrafında, dördüncü mertebeye kadar açmak,

$$F \simeq -Nk_B T \ln 2 + N \left(\frac{k_B T}{2} - 3J \right) x^2 + \frac{Nk_B T}{12} x^4$$

verir. Açıkça, F 'nin ikinci türevi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = N(k_B T - 6J) + Nk_B T x^2$$

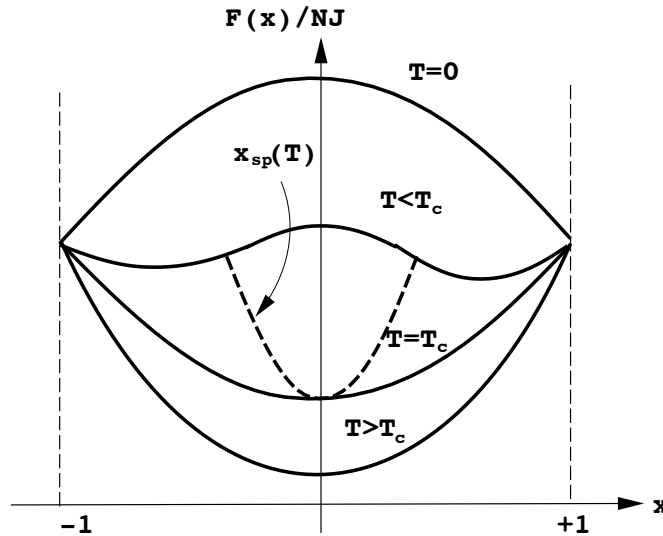
T yeterince küçükse, negatif olur. Sıcaklığın azaltınca, F ilk defa $x = 0$ 'da ve kritik $T_c = 6J/k_B$ sıcaklığında içbükey olur.

(e) $F(x)$ 'i $T > T_c$, $T = T_c$ ve $T < T_c$ için kabataslak çizin. $T < T_c$ için, $F(x)$ 'in iç bükey olmadığı bir karışım bölgesi $x < |x_{sp}(T)|$ vardır, ve sonuç olarak karışım yerel olarak kararsızdır. $x_{sp}(T)$ 'yi bulun.

- $F(x)$ fonksiyonu $\partial^2 F / \partial x^2 < 0$ ise içbükeydir, yani eğer

$$x^2 < \left(\frac{6J}{k_B T} - 1 \right)$$

ise. Bu, $T < T_c$ için, aşağıdaki grafikte kesikli çizgi ile belirtildiği gibi,



$$x_{sp}(T) = \sqrt{\frac{6J}{k_B T} - 1}$$

ile verilen spinodal çizgide olur.

(f) Alaşım, bileşimleri $\pm x_{de}(T)$ olan A zengin ve B zengin fazlara ayrışarak serbest enerjisini genel olarak minimize eder, burada $x_{de}(T)$, $F(x)$ 'in en küçük değerini aldığı noktadır. $x_{de}(T)$ 'yi bulun.

- İlk türevi $dF(x)/dx = Nx \{(k_B T - 6J) + k_B T x^2/3\}$ sıfıra eşitlemek, denge değerini

$$x_{de}(T) = \begin{cases} \pm \sqrt{3} \sqrt{\frac{6J}{k_B T} - 1} & T < T_c \text{ için} \\ 0 & T > T_c \text{ için} \end{cases}$$

olarak verir.

(g) (T, x) düzleminde, $\pm x_{de}(T)$ faz ayırım sınırını kabataslak çizin; ve spinodal çizgi denen $\pm x_{sp}(T)$ 'yi. (Spinodal çizgi, yarı istikrarlılığın ve histerisis etkilerinin başlamasını işaret eder.)

- Spinodal ve denge eğrileri, yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. İki eğri arasındaki bölgede, sistem yerel olarak kararlı fakat global olarak kararsızdır. Bu sistemde, kararlı bölgelerin oluşması çekirdenlenmeyi gerektirir, ve çok yavaştır. Kesik çizgili alan, yerel olarak kararsızdır, ve sistem kolayca A zengin ve B zengin bölgelere ayrılır.

2. Miknatıslanmanın İsing Modeli: Bazen bir elektronun kristaldeki yerel çevresi, spinini belli bir ağ yönüne paralel veya anti paralel olmaya zorlar. Böyle modellerdeki bir miknatıslanma modeli olarak, spinin yönünü tek bir değişkenle $\sigma_i = \pm 1$ (bir İsing spini) ile göstereceğiz. $\{\sigma_i\}$ diziliminin enerjisi

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad ;$$

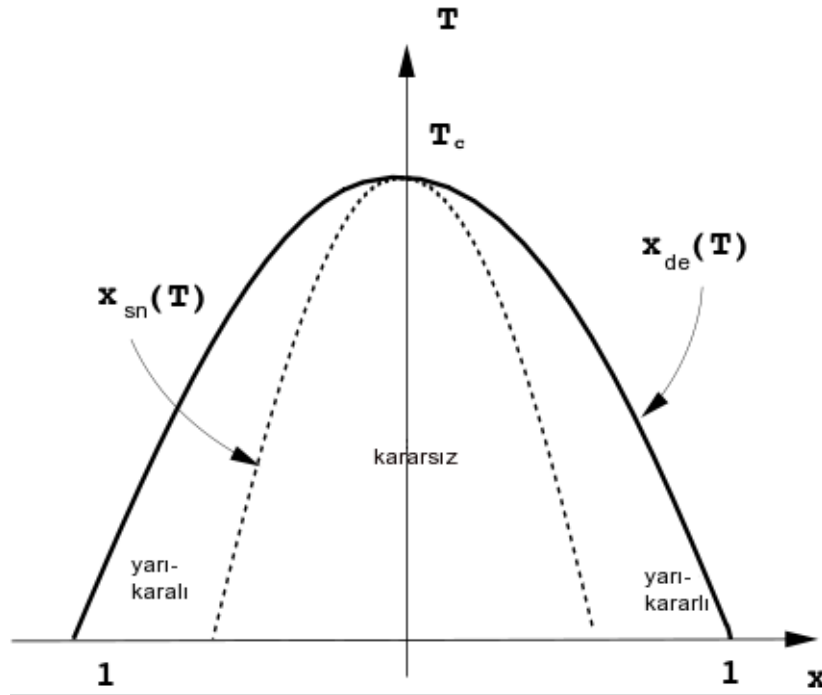
ile verilir, burada h harici bir manyetik alan, ve J_{ij} ise i ve j konumlarındaki spinlerin etkileşme enerjisidir.

(a) N spin için, büyük bir *yaklaştırma* yapacağız ve bütün spinler için etkileşmenin aynı olduğunu varsayacağız, ve $J_{ij} = -J/N$ (özdeş komşu modeli). Şimdi enerjinin, miknatıslanma $m = \sigma_{i=1}^N \sigma_i / N = M/N$ ile $E(M, h) = -N [Jm^2/2 + hm]$ olarak yazılabileceğini gösterin.

- $J_{ij} = -J/N$ için, her dizilimin enerjisi, sadece $m = \sum_i \sigma_i / N$ 'in fonksiyonudur ve

$$\begin{aligned} E(M, h) &= -\frac{J}{2N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i \\ &= -N \frac{J}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i / N \right) \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j / N \right) - Nh \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i / N \right) \\ &= -N \left(\frac{J}{2} m^2 + hm \right) \end{aligned}$$

olarak verilir.



(b) Bölüşüm fonksiyonunun, $Z(h, T) = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta\mathcal{H})$, problem (1)'dekine benzer bir şekilde kolayca hesaplanabilen bir $F(m, h)$ cinsinden, $Z = \sum_M \exp[-\beta F(m, h)]$ şeklinde yeniden yazılabileceğini gösteriniz. Problemin geri kalanında sadece $F(m, h)$ 'in m 'de 4'üncü mertebeye kadar açılımını kullanın.

- Enerji sadece yukarı spinlerin sayısına N_+ bağlı olduğu, ve dizilimlerine bağlı olmadığı için,

$$\begin{aligned}
 Z(h, T) &= \sum_{\{\sigma_i\}} \exp(-\beta\mathcal{H}) \\
 &= \sum_{N_+=0}^N (N_+'nın \text{ sabit olduğu dizilimler}) \cdot \exp[-\beta E(M, h)] \\
 &= \sum_{N_+=0}^N \left[\frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} \right] \exp[-\beta E(M, h)] \\
 &= \sum_{N_+=0}^N \exp \left\{ -\beta \left[E(M, h) - k_B T \ln \left(\frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} \right) \right] \right\} \\
 &= \sum_M \exp[-\beta F(m, h)]
 \end{aligned}$$

olur. Bir önceki probleme benzerlikten ($N_+ \leftrightarrow N_A$, $m \leftrightarrow x$, $J/2 \leftrightarrow 3J$)

$$\frac{F(m, h)}{N} = -k_B T \ln 2 - hm + \frac{1}{2}(k_B T - J)m^2 + \frac{k_B T}{12}m^4 + \mathcal{O}(m^5)$$

(c) Semer noktası integrali ile, gerçek serbest enerjinin, $F(h, T) = -kT \ln Z(h, T)$,

$F(h, T) = \min [F(m, h)]_m$ olarak verildiğini gösterin. Semer noktası yöntemi ne zaman geçerlidir? $F(m, h)$ 'nin analitik ama $T < T_c$ için iç bükey olmayan bir fonksiyonken gerçek serbest enerji $F(h, T)$ 'nin içbükey ancak en küçük değerini almaktan dolayı analitik olmayan bir fonksiyon olduğuna dikkat edin.

• $F(m, h)$ en küçük değerine $m^*(h, T)$ 'de ulaşsın, yani $\min [F(m, h)]_m = F(m^*, h)$. Z 'yi veren toplamda N terim olduğundan,

$$\exp(-\beta F(m^*, h)) \leq Z \leq N \exp(-\beta F(m^*, h))$$

sınırlarını elde ederiz, veya, logaritmasını alıp, $-\beta N$ ile bölünce

$$\frac{F(m^*, h)}{N} \geq \frac{F(h, T)}{N} \geq \frac{F(m^*, h)}{N} + \frac{\ln N}{N}$$

F yaygın olduğu için, $N \rightarrow \infty$ limitinde

$$\frac{F(m^*, h)}{N} = \frac{F(h, T)}{N}$$

elde ederiz.

(d) $h = 0$ için, daha düşük sıcaklıklarda kendinden mıknatıslanmanın ortaya çıktığı kritik sıcaklığı T_c bulun; ve düşük sıcaklık fazında $\bar{m}(T)$ mıknatıslanmayı hesaplayın.

• Gerçek serbest enerjinin tanımından, mıknatıslanma

$$\bar{m} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F(h, T)}{\partial h}$$

olarak verilir, yani

$$\bar{m} = -\frac{1}{N} \frac{dF(m, h)}{dh} = -\frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial F(m, h)}{\partial h} + \frac{\partial F(m, h)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial h} \right\}$$

Dolayısıyla, eğer m^* 'da $F(m, h)$ 'in en küçük değeri varsa, yani eğer $\partial F(m, h)/\partial m|_{m^*} = 0$, o zaman

$$\bar{m} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F(m, h)}{\partial h} \Big|_{m^*} = m^*$$

olur. $h = 0$ için,

$$m^{*2} = \frac{3(J - k_B T)}{k_B T}$$

olarak

$$T_c = \frac{J}{k_B}$$

ve

$$\bar{m} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{3(J - k_B T)}{k_B T}} & T < T_c \quad \text{için} \\ 0 & T > T_c \quad \text{için} \end{cases}$$

(e) Tepki fonksiyonlarının tekil (analitik olmayan) davranışlarını hesaplayın

$$C = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{h=0}, \quad \text{ve} \quad \chi = \left. \frac{\partial \bar{m}}{\partial h} \right|_{h=0}$$

• Isı sıçması

$$C = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_{h=0, m=m^*} = -\frac{NJ}{2} \frac{\partial m^{*2}}{\partial T} = \begin{cases} \frac{3NJ T_c}{2T^2} & T < T_c \text{ ise} \\ 0 & T > T_c \text{ ise} \end{cases}$$

yani $\alpha = 0$, bir süreksizliğe işaret eder. Alınanlığı hesaplamak için,

$$h = (k_B T - J)\bar{m} + \frac{k_B T}{3}\bar{m}^3$$

ifadesini kullanırız. h 'ye göre türev alarak,

$$1 = (k_B T - J + k_B T \bar{m}^2) \frac{\partial \bar{m}}{\partial h}$$

elde ederiz, ki bu da

$$\chi = \left. \frac{\partial \bar{m}}{\partial h} \right|_{h=0} = \begin{cases} \frac{1}{2k_B(T_c - T)} & T < T_c \text{ ise} \\ \frac{1}{k_B(T - T_c)} & T > T_c \text{ ise} \end{cases}$$

verir. Yukarıdaki ifadeden, $\gamma_{\pm} = 1$ ve $A_+/A_- = 2$ elde ederiz.

3. Ağ-Gazı Modeli: Aşağıdaki Hamiltoniyene tabi parçacıklardan oluşan gazı düşünün:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad \text{V hacmi içinde}$$

(a) Büyük bölüşüm fonksiyonunun

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{e^{\beta\mu}}{\lambda^3} \right)^N \int \prod_{i=1}^N d^3 \vec{r}_i \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

olarak yazılabileceğini gösteriniz.

• Büyük bölüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{N\beta\mu}}{N!} Z_N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{N\beta\mu}}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 p_i d^3 r_i}{h^3} e^{-\beta \mathcal{H}} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{N\beta\mu}}{N!} \left(\prod_{i=1}^N \int \frac{d^3 p_i}{h^3} e^{-\beta p_i^2/2m} \right) \int \prod_{i=1}^N d^3 r_i \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{e^{N\beta}}{\lambda^3} \right)^N \int \prod_{i=1}^N d^3 r_i \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}_{ij} \right)$$

olarak hesaplanır, burada $\lambda^{-1} = \sqrt{2\pi m k_B T}/h$ 'dir.

(b) V hacmi, hacmi a^3 olan $\mathcal{N} = V/a^3$ kısma bölünmüştür, öyle ki a aralığı, her α hücresi ya boş ya da tek bir parçacık tarafından doldurulabilecek kadar küçük seçilmiştir; yani hücre doluluk sayısı n_α , 0 veya 1 ile sınırlanmıştır ($\alpha = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$). $\int d^3 \vec{r}$ integrallerini $a^3 \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}}$ toplamları ile yaklaştırdıktan sonra,

$$\Xi \approx \sum_{\{n_\alpha=0,1\}} \left(\frac{e^{\beta\mu} a^3}{\lambda^3} \right)^{\sum_\alpha n_\alpha} \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathcal{N}} n_\alpha n_\beta \mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \right]$$

olduğunu gösterin.

$$\prod_{i=1}^N d^3 r_i \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}_{ij} \right) \approx a^{3N} \sum' \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \sum_{\alpha,\beta}^{\mathcal{N}} n_\alpha n_\beta \mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \right\} \cdot N!$$

burada üslü toplam, sabit N 'de $\{n_\alpha = 0, 1\}$ dizilimleri üzerindedir, ve

$$N = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} n_\alpha$$

olduğu için

$$\Xi \approx \sum_{\{n_\alpha=0,1\}} \left(\frac{e^{\beta\mu} a^3}{\lambda^3} \right)^{\sum_\alpha n_\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathcal{N}} n_\alpha n_\beta \mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \right\}$$

elde ederiz.

(c) $n_\alpha = (1 + \sigma_\alpha)/2$ alarak, ve potansiyeli $\mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = -J/\mathcal{N}$ olarak yaklaştırmak, bu modelin problem (2)'de incelenen ile özdeş olduğunu gösterin. Bu, mükemmel olmayan gazın davranışı ile ilgili ne söyler?

• $n_\alpha = (1 + \sigma_\alpha)/2$ ve $\mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = -J/\mathcal{N}$ ile,

$$\Xi = \sum_{\{n_\alpha=0,1\}} \exp \left\{ \left(\beta\mu + 3 \ln \frac{a}{\lambda} \right) \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{1 + \sigma_\alpha}{2} \right) + \frac{\beta J}{2\mathcal{N}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathcal{N}} \left(\frac{1 + \sigma_\alpha}{2} \right) \left(\frac{1 + \sigma_\beta}{2} \right) \right\}$$

olur. $m \equiv \sum_\alpha \sigma_\alpha / \mathcal{N}$, $h' = \frac{1}{2} \left(\mu + \frac{2}{\beta} \ln \frac{a}{\lambda} + \frac{J}{2} \right)$ ve $J' = J/4$ alarak, büyük bölüşüm fonksiyonu

$$\Xi = \text{sabit} \sum_{\{n_\alpha=0,1\}} \exp \left\{ \mathcal{N} \beta \left(J' m^2 / 2 + h' m \right) \right\}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla, ağ-gazının faz diyagramı, problem 2'deki İsing modelinin faz diyagramı ile eşleştirilebilir. Özellikle, $h' = 0$ olacak bir kimyasal potansiyelde, μ , kritik $T_c = J/4k_B$

sıcaklığında, sürekli bir “yoğuşma” geçişi vardır. (

$$m = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} / \mathcal{N} = \sum_{\alpha} (2n_{\alpha} - 1) / \mathcal{N} = 2a^3 \rho - 1$$

olduğuna dikkat edin, burada $\rho = N/V$ gazın yoğunluğudur.)

• Bu üç sistemin, açıkça birbirine eşit olması, hepsinin aynı (İsing) Hamiltoniyeni ile eşleşmesindedir. Ancak, birbirleri ile bu kadar kolay eşleştirilemeyen sistemlerin kritik davranışları arasında, Evrensellik prensibinden dolayı, daha ince bir eşitlik varır.

4. Yüzey Aktif Madde Yoğuşması: N tane yüzey aktif molekül, suyun yüzeyinde A alanına eklenmiştir. Tabii oldukları Hamiltoniyen

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

olarak verilir, burada \vec{r}_i ve \vec{p}_i , i 'inci parçacığın konum ve momentumunu gösteren iki boyutlu vektörlerdir.

(a) $Z(N, T, A)$ bölüşüm fonksiyonunun ifadesini, \vec{r}_i ve \vec{p}_i üzerinden integraller cinsinden yazın, ve momentumlar üzerinden integralleri alın.

• Bölüşüm fonksiyonu, Boltzman ağırlığını, faz uzayı üzerinden integralleyerek elde edilir:

$$Z(N, T, A) = \int \frac{\prod_{i=1}^N d^2 \vec{p}_i d^2 \vec{q}_i}{N! h^{2N}} \exp \left[-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} - \beta \sum_{i<j} \mathcal{V}(\vec{q}_i - \vec{q}_j) \right]$$

burada $\beta = 1/(k_B T)$. Momentumlar üzerinden integraller Gaussiyandır, ve

$$Z(N, T, A) = \frac{1}{N!} \frac{1}{\lambda^{2N}} \int \prod_{i=1}^N d^2 \vec{q}_i \exp \left[-\beta \sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{q}_i - \vec{q}_j) \right]$$

verir, burada her zamanki gibi $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ termal dalgaboyunu gösterir.

Parçacıklar arası potansiyel $\mathcal{V}(\vec{r})$, $|\vec{r}| < a$ aralıkları için sonsuz ve $|\vec{r}| > a$ için çekicidir, öyle ki $\int_a^{\infty} 2\pi r dr \mathcal{V}(r) = -u_0$

(b) N parçacık sisteminin konum faz uzayında mevcut, dışlanmamış toplam alanı tahmin edin.

• Dışlanmış alanlarla, parçacıkların bütün faz uzayını tahmin etmek için, onları sisteme birer birer ekleriz. İlki, bütün A alanını kaplayabilirken, ikincisi sadece $A - 2\Omega$ 'lik bir alanı araştırabilir, burada $\Omega = \pi a^2$. Üç parçacık etkilerini ihmal ederek, (yani seyreklik limitinde), üçüncü parçacığa açık alan $(A - 2\Omega)$ 'dir ve benzer şekilde n 'inci parçacık için $(A - n\Omega)$ 'dir. Dolayısıyla, bağlı dışlanmış alan, bu limitte

$$A(A - \Omega)(A - 2\Omega) \cdots (A - (N - 1)\Omega) \approx (A - N\Omega/2)^N$$

olur, burada son yaklaşıklık, m ve $(N - m)$ terimlerini eşleyerek, ve çarpımlarına Ω^2 mertebesindeki katkıları ihmal ederek elde edilmiştir.

(c) Sistemin toplam *potansiyel* enerjisini, yoğunluğunun $n = N/A$ *düzgün* olduğunu varsayarak, tahmin edin. Bir önceki kısımda izin verilen bütün dizilimler için bu potansiyeli kullanarak, Z için bir yaklaşırma yazınız.

- *Düzgün* $n = N/A$ *yoğunluğu* varsayarak, çekici potansiyel enerji, \bar{U} ,

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}_{\text{çek.}}(\vec{q}_i - \vec{q}_j) = \frac{1}{2} \int d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2 n(\vec{r}_1) n(\vec{r}_2) \mathcal{V}_{\text{çek.}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &\approx \frac{n^2}{2} A \int d^2\vec{r} \mathcal{V}_{\text{çek.}}(\vec{r}) \equiv -\frac{N^2}{2A} u_0\end{aligned}$$

olarak tahmin edilir. Önceki sonuçları birleştirince

$$Z(N, T, A) \approx \frac{1}{N!} \frac{1}{\lambda^{2N}} (A - N\Omega/2)^N \exp\left[\frac{\beta u_0 N^2}{2A}\right]$$

elde edilir.

(d) Yüzey aktif maddelerin olmadığı durumda, suyun yüzey gerilimi, yaklaşık olarak sıcaklıktan bağımsız olarak, σ_0 'dır. Yüzey aktif maddelerin olduğu durumda, $\sigma(n, T)$ yüzey gerilimini hesaplayınız.

- Yüzey alanını değiştirirken yapılan iş $dW = \sigma dA$ olduğu için, $dF = -TdS + \sigma dA + \mu dN$ olur, burada $F = -k_B T \ln Z$ serbest enerjidir. Buradan, yüzey aktif maddenin, filmin yüzey gerilimine katkısı

$$\sigma_s = - \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial A} \right|_{T, N} = - \frac{Nk_B T}{A - N\Omega/2} + \frac{u_0 N^2}{2A^2}$$

olur, ki bu bilinen van der Waals denkleminin iki boyutlu bir çeşitlemesidir. Yüzey aktif maddenin olmadığı durumdaki (sabit) katkısı da ekleyince,

$$\sigma(n, T) = \sigma_0 - \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial Z} \right|_{T, N} = - \frac{Nk_B T}{A - N\Omega/2} + \frac{u_0 N^2}{2A^2}$$

elde edilir.

(e) Belli bir sıcaklığın altında, T_c , σ için ifadenin açıkça yanlış olduğunu gösteriniz. Düşük sıcaklıklarda ne olduğunu düşünüyorsunuz?

- Termodinamik kararlılık için, $\delta\sigma\delta A \geq 0$, olması lazım, yani σ her sıcaklıkta, sıcaklık ile beraber monoton artan bir fonksiyon olmalıdır. σ_s 'deki ilk terimin belirleyici olduğu yüksek sıcaklıklarda, bu geçerlidir, ancak çekici etkileşimden gelen terim önemli olmaya başladığı düşük sıcaklıklarda, artık geçerli değildir. Kritik sıcaklık, her zamanki koşullardan $\partial\sigma_s/\partial A = \partial^2\sigma_s/\partial A^2 = 0$ elde edilir, yani

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial\sigma_s}{\partial A} \right|_T = \frac{Nk_B T}{(A - N\Omega/2)^2} - \frac{u_0 N^2}{A^3} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2\sigma_s}{\partial A^2} \right|_T = -\frac{2Nk_B T}{(A - N\Omega/2)^2} + \frac{3u_0 N^2}{A^4} = 0 \end{cases}$$

denklemlerinden. İki denklem de $A_c = 3N\Omega/2$ için,

$$T_c = \frac{8u_0}{27k_B\Omega}$$

sıcaklığında sağlanır. Van der Waals gazında olduğu gibi, T_c 'nin altında, yüzey aktif madde, yüksek yoğunluklu (sıvı) ve düşük yoğunluklu (gaz) fazlarına ayrılır.

(f) Isı sığalarını, C_A , hesaplayınız ve yüzey aktif maddeden kaynaklı C_σ için, açıkça hesaplamadan, bir ifade yazınız.

- Yüzey aktif maddenin filmin enerjisine katkısı

$$E_s = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = 2N \times \frac{k_B T}{2} - \frac{u_0 N^2}{2A}$$

olarak verilir. İlk terim, yüzey aktif maddenin kinetik enerjisinden kaynaklanırken, ikincisi (ortalama alan) çekimlerinden ortaya çıkar. O zaman, ısı sığaları

$$C_A = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_A = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_A = Nk_B$$

ve

$$C_\sigma = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_\sigma = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_\sigma - \sigma \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_\sigma$$

olarak hesaplanır.

5. Üçüncü derece değişmezler: Düzen parametresi m , süreksiz olarak sıfıra giderse, faz geçişinin birinci derece (süreksiz) olduğu söylenir. Sıkça rastlanılan bir örnek, simetriklerin, Landau serbest enerjisinde üçüncü derece bir terimi dışlamadığı durumda görülür:

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + cm^3 + um^4 \right] \quad (K, c, u > 0)$$

(a) Semer noktası yaklaşımında, düzgün m için, değişik t değerlerinde, $\Psi(m)$ enerji yoğunluğunu çizerek, t azaltılırken, pozitif bir \bar{t} değerinde, $\bar{m} \neq 0$ 'a süreksiz bir atlama olduğunu gösterin.

- Cebirsel işlemleri kolaylaştırmak için, düzgün m için, $\Psi(m)$ enerji yoğunluğunu, yeniden ölçeklenmiş

$$m_r = \frac{u}{c}m$$

niceliği cinsinden yazalım. Bu yolla, c ve u sabit parametrelerinden kurtularak enerji yoğunluğu için

$$\Psi_r(m_r) = \frac{1}{2}t_r m_r^2 + m_r^3 + m_r^4$$

ifadesini elde ederiz, burada

$$\Psi_r = \left(\frac{c^4}{u^3} \right) \Psi, \quad \text{ve} \quad t_r = \left(\frac{u}{c^2} \right) t$$

olarak tanımladık. Ψ_r 'in uç değerini bulmak için, m_r 'ye göre birinci türevini sıfıra eşitleriz, yani

$$\frac{d\Psi_r(m_r)}{dm_r} = m_r(t_r + 3m_r + 4m_r^2) = 0$$

Bu denklemin ilginç olmayan çözümü $m_r^* = 0$ 'dır. Ancak eğer $t_r \leq 9/16$ ise, türev $m_r^* = (-3 \pm \sqrt{9 - 16t_r})/8$ 'de de yok olur. $t_r > 0$ olduğu sürece, m_r^* , $\Psi_r(m_r)$ noktasının en düşük değerini aldığı noktadır. Ek olarak, eğer $t_r < 9/16$ ise, $\Psi_r(m_r)$ 'in bir başka en küçük değerini aldığı nokta

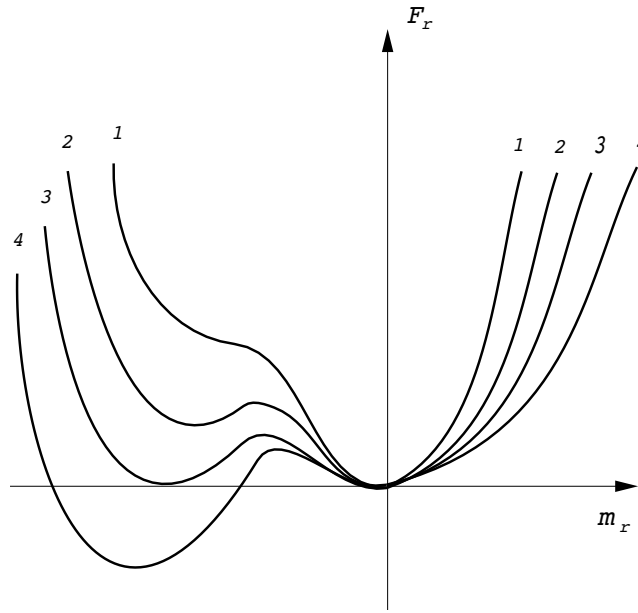
$$m_r^* = -\frac{3 + \sqrt{9 - 16t_r}}{8}$$

dedir, ve iki en küçük değeri arasında,

$$m_r^* = \frac{-3 + \sqrt{9 - 16t_r}}{8}$$

noktasında, en büyük değerini alır.

Eşlik eden şekil, $\Psi_r(m_r)$ 'in farklı t_r değerleri için davranışını göstermektedir.



1. $t_r > 9/16$ için, $m_r^* = 0$ 'da sadece tek bir noktada en küçük değerini alır
2. $0 < \bar{t}_r < t_r < 9/16$ için, iki noktada en küçük değerini alır, ancak $\Psi_r(m_r^*) > \Psi_r(0) = 0$ olur.
3. $0 < t_r = \bar{t}_r$ için, $\Psi_r(m_r^*) = \Psi_r(0) = 0$
4. $0 < t_r < \bar{t}_r$ için, $\Psi_r(m_r^*) < \Psi_r(0) = 0$

Süreksiz geçiş, $m_r^* < 0$ 'daki yerel en küçük değer, mutlak en küçük değer olduğunda olur. m_r için $m_r^* = 0$ 'dan $m_r^* = \bar{m}_r$ 'a karşılık gelen bir atlama vardır, burada $\bar{m}_r = m_r^*(t_r = \bar{t}_r)$.

(b) Geçişte, \bar{m} ve \bar{t} 'nin sağlaması gereken iki koşulu da yazarak, \bar{m} ve \bar{t} için çözün.

- \bar{m}_r ve \bar{t}_r 'i belirlemek için,

$$\frac{d\Psi_r(m_r)}{dm_r} = 0, \quad \text{ve} \quad \Psi_r(m_r) = \Psi_r(0) = 0$$

denklemlerini beraber çözmemiz gerekir. İlginç olmayan $m_r^* = 0$ çözümünü dışarıda bırakırsak

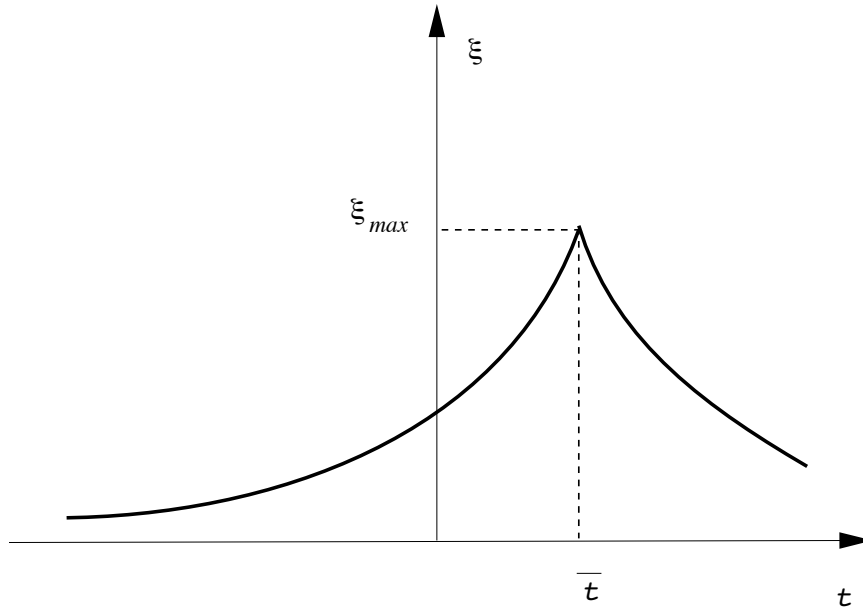
$$\begin{cases} t_r + 3m_r + 4m_r^2 = 0 \\ \frac{t_r}{2} + m_r + m_r^2 = 0 \end{cases}$$

denklemlerinden, $\bar{t}_r = -\bar{m}_r = 1/2$ elde ederiz, veya orijinal birimler cinsinden

$$\bar{t} = \frac{c^2}{2u}, \quad \text{ve} \quad \bar{m} = -\frac{c}{2u}$$

(c) Bağdaşıklık uzunluğunun ξ , $\Psi(m)$ 'in en küçük değerindeki yuvarlaklığına $K\xi^{-2} = \partial^2\Psi/\partial m^2|_{de}$ şeklinde bağlı olduğunu hatırlayın. ξ 'i, t 'nin fonksiyonu olarak çizin.

-



Benzer şekilde $m = m_{de}$ denge değeri, orijinal birimler cinsinden

$$m_{de} = \begin{cases} 0 & t > \bar{t} = \frac{c^2}{2u} \quad \text{için} \\ -\left(\frac{c}{u}\right) \frac{3 + \sqrt{9 - 16ut/c^2}}{8} & t < \bar{t} \quad \text{için} \end{cases}$$

Bağdaşıklık uzunluğu ξ , $\Psi(m)$ 'in dengedeki en küçük değerinin yuvarlaklığı ile

$$K\xi^{-2} = \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2} \right|_{m_{de}} = t + 6cm_{de} + 12um_{de}^2$$

şeklinde ilişkilidir, ki bu

$$\xi = \begin{cases} \left(\frac{K}{t}\right)^{1/2} & \text{eğer } t > \bar{t} \text{ ise} \\ \left(-\frac{K}{2t+3cm_{de}}\right)^{1/2} & \text{eğer } t < \bar{t} \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesine eşittir. (Son ifadeyi elde etmek için, $d\Psi(m)/dm|_{m=m_{de}} = 0$ sonucunu kullandık.) Burada ξ 'in t 'nin fonksiyonu olarak çizimi verilmiştir. Bağdaşıklık uzunluğunun ξ , süreksiz faz geçişinde sonlu olduğuna ve

$$\xi_{\text{en büyük}} = \xi(\bar{t}) = \frac{\sqrt{2Ku}}{c}$$

en büyük değerine ulaştığına dikkat edin.

6. Üçlü Kritik Nokta: Ek bir parametreyi ayarlayarak, ikinci derece bir geçiş, birinci derece yapılabilir. İki tür geçişi birbirinden ayıran nokta üçlü kritik nokta olarak bilinir, ve Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini inceleyerek araştırılabilir

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{K}{2} (\nabla m)^2 + \frac{t}{2} m^2 + um^4 + vm^6 - hm \right]$$

burada u pozitif de olabilir negatif de. $u > 0$ için, kararlılığı sağlamak için pozitif bir v gereklidir.

(a) $\Psi(m)$ enerji yoğunluğunu, çeşitli t değerlerinde, kabataslak çizerek, semer noktası yaklaşımında, $u < 0$ ve $h = 0$ 'da birinci derece bir geçiş olduğunu gösterin.

• $h = 0$ 'ı düşünürsek, düzgün m için, $\Psi(m)$ enerji yoğunluğu

$$\Psi(m) = \frac{t}{2} m^2 + um^4 + vm^6$$

olarak verilir. Bir önceki problemde olduğu gibi, Ψ 'in uç değerlerini bulmak için, m 'ye göre ilk türevleri sıfıra eşitleyelim. Yeniden, $t > 0$ olduğu sürece, $\Psi(m)$, $m^* = 0$ 'da en küçük değerine ulaşır. Ancak türev, bazı koşulları sağlandığı sürece, başka noktalarda da sıfır değerini alır. Onları bulmak için, takip eden denklemi çözmemiz lazım:

$$t + 4um^2 + 6vm^4 = 0$$

ki buradan

$$m^{*2} = -\frac{u}{3v} \pm \frac{\sqrt{4u^2 - 6tv}}{6v}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, gerçek ve pozitif çözümleri

$$u < 0, \quad \text{ve} \quad t < \frac{2u^2}{3v}$$

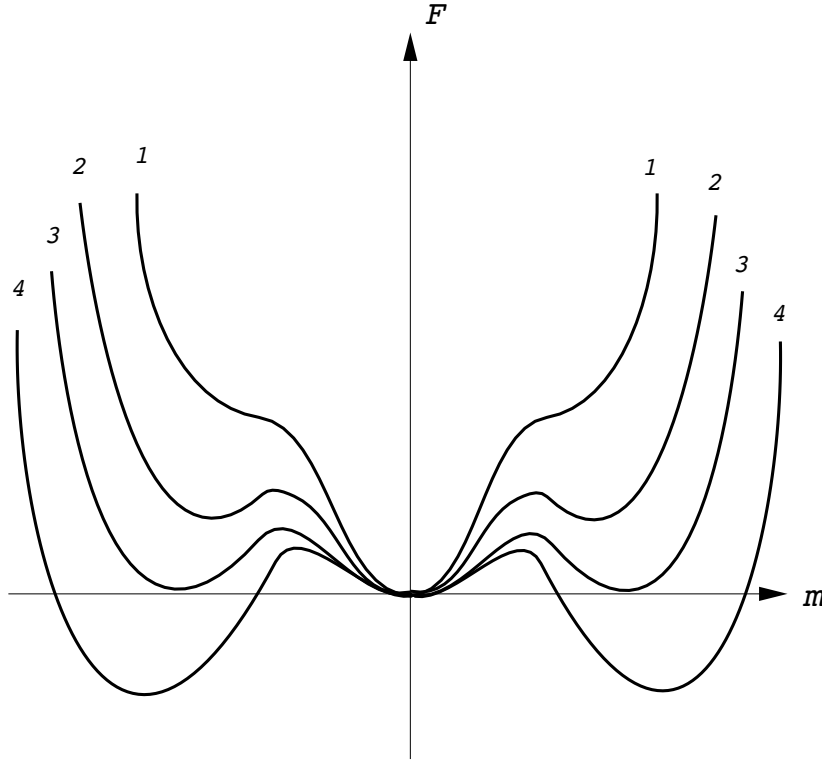
koşulları sağlanırsa elde ederiz. Bu koşullar sağlanırsa, eşlik eden şekilde gösterildiği gibi, $\psi(m)$ 'in başka iki en küçük değerine

$$m^{*2} = \frac{|u|}{3v} + \frac{\sqrt{4u^2 - 6tv}}{6v}$$

noktalarında ve iki en büyük değerine

$$m^{*2} = \frac{|u|}{3v} - \frac{\sqrt{4u^2 - 6tv}}{6v}$$

noktalarında ulaşır.



$\Psi(m)$ fonksiyonunun farklı davranışları aşağıdaki gibidir:

1. $t > 2u^2/3v$ için, sadece $m^* = 0$ noktasında tek en küçük değeri vardır.
2. $0 < \bar{t} < t < 2u^2/3v$ için, üç noktada en küçük değeri vardır, ancak $\Psi(\pm m^*) > \Psi(0) = 0$
3. $0 < t = \bar{t}$ için, $\Psi(\pm m^*) = \Psi(0) = 0$
4. $0 < t < \bar{t}$, $\Psi(\pm m^*) < \Psi(0) = 0$

Dolayısıyla, $u < 0$ ve $t = \bar{t}(u)$ için süreksiz bir faz geçişi vardır.

(b) Bu geçişte \bar{t} 'yi ve \bar{m} 'deki süreksizliği hesaplayın.

• \bar{t} ve $\bar{m} = m^*(t = \bar{t})$ 'yi hesaplamak için, yeniden

$$\frac{d\Psi(m)}{dm^2} = 0, \quad \text{ve} \quad \Psi(m^2) = \Psi(0) = 0$$

denklemlerini veya özdeş olan

$$\begin{cases} \frac{t}{2} + 2um^2 + 3vm^4 = 0 \\ \frac{t}{2} + um^2 + vm^4 = 0 \end{cases}$$

denklemlerini beraber çözmemiz gerekmektedir, buradan

$$\bar{t} = \frac{u^2}{2v}, \quad \text{ve} \quad \bar{m}^2 = -\frac{u}{2v} = \frac{|u|}{2v}$$

elde ederiz.

(c) $h = 0$ ve $v > 0$ için, (u, t) düzleminde faz sınırını, fazları ve faz geçişlerinin derecesini belirleyerek, çizin.

• (u, t) düzleminde, $u < 0$ için $t = u^2/2v$ çizgisi, birinci derece faz geçişi sınırınıdır. Ek olarak, $u > 0$ için $t = 0$ çizgisi, eşlik eden şekilde gösterildiği gibi, ikinci derece faz geçiş sınırını tanımlar.

(d) $u = t = 0$ özel noktası, ki birinci ve ikinci derece faz geçişlerini ayırır, bir *üçlü kritik noktadır*. $u = 0$ için, mıknatıslanma, alınganlık ve ısı sığasındaki tekillikleri kontrol eden üçlü kritik üstelleri β , δ , γ ve α 'yı hesaplayınız. (Hatırlatma: $C \propto t^{-\alpha}$; $\bar{m}(h = 0) \propto t^\beta$; $\chi \propto t^{-\gamma}$; ve $\bar{m}(t = 0) \propto h^{1/\delta}$.)

• $u = 0$ için, α , β , γ ve δ üçlü kritik üstellerini hesaplayalım. α ve β 'yi hesaplayabilmek için, $h = 0$ alırsak, böylece

$$\Psi(m) = \frac{t}{2}m^2 + vm^6$$

Dolayısıyla,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right|_{\bar{m}} = \bar{m}(t + 6v\bar{m}^4) = 0$$

ifadesinden

$$\bar{m} = \begin{cases} 0 & t > \bar{t} = 0 \quad \text{için} \\ \left(-\frac{t}{6v}\right)^{1/4} & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

elde ederiz, ki buradan

$$\bar{m}(h = 0) \propto t^\beta, \quad \beta = \frac{1}{4} \quad \text{ile}$$

elde edilir. Karşılık gelen serbest enerjisi,

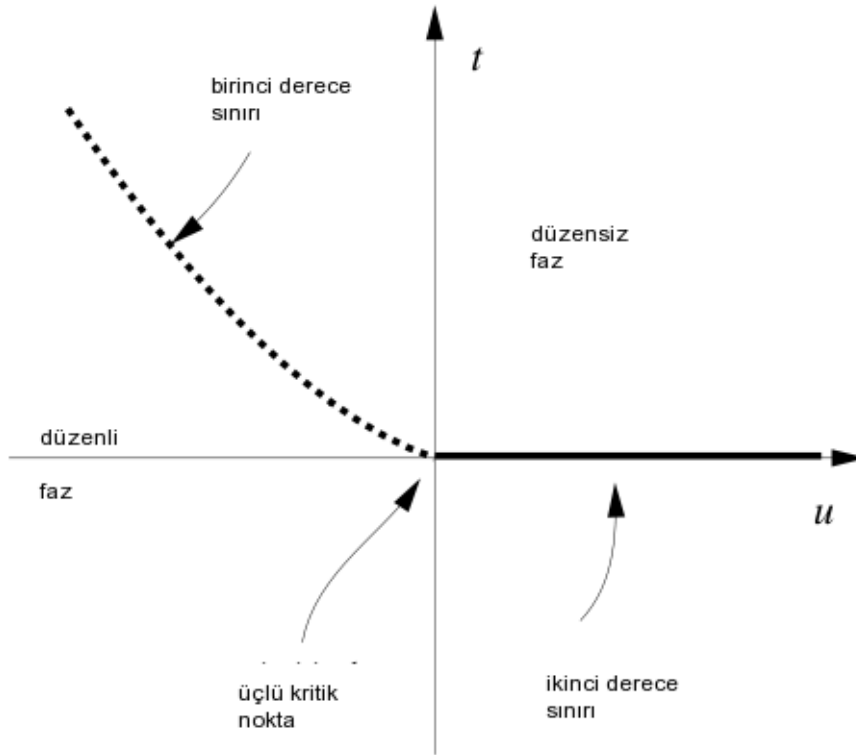
$$\Psi(\bar{m}) \sim \bar{m}^6 \propto (-t)^{3/2}$$

şeklinde ölçeklenir. α üçlü kritik üsteli, $C \sim (\partial^2 \Psi / \partial T^2)|_{h=0, \bar{m}}$ ısı sığasının analitik olmayan davranışını karakterize eder, ve $t \propto (T - T_c)$ olduğu için

$$C \sim \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right|_{h=0, \bar{m}} \propto t^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{ile}$$

δ üçlü kritik üstelini hesaplamak için $t = 0$ alırken, $h \neq 0$ alırsak, böylece

$$\Psi(m) = vm^6 - hm$$



Dolayısıyla

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right|_{\bar{m}} = 6v\bar{m}^5 - h = 0$$

ifadesinden

$$\bar{m} \propto h^{1/\delta}, \quad \delta = 5 \quad \text{ile}$$

Son olarak, $h \neq 0$ ve $t \neq 0$ için,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right|_{\bar{m}} = t\bar{m} + 6v\bar{m}^5 - h = 0$$

böylece alınganlık

$$\chi = \left. \frac{\partial \bar{m}}{\partial h} \right|_{h=0} \propto |t|^{-1}, \quad \text{hem } t < 0 \quad \text{hem } t > 0 \quad \text{için}$$

olarak ölçeklenir, yani $\gamma_{\pm} = 1$ üstelleri ile.

7. Enine Alınganlık: n bileşenli bir mıknatıslanma alanı $\vec{m}(\mathbf{x})$, $\beta\mathcal{H}$ Hamiltoniyenindeki $-\int d^d \mathbf{x} \vec{h} \cdot \vec{m}(\mathbf{x})$ terimi ile harici bir alana, \vec{h} , çiftlenmiştir. Eğer $\vec{h} = 0$ 'daki $\beta\mathcal{H}$, $\vec{m}(\mathbf{x})$ 'in dönmeleri altında değişmez ise serbest enerji yoğunluğu ($f = -\ln Z/V$), sadece \vec{h} 'nin mutlak değerine bağlıdır, yani $f(\vec{h}) = f(h)$, burada $h = |\vec{h}|$.

(a) $m_\alpha = \langle \int d^d \mathbf{x} m_\alpha(\mathbf{x}) \rangle / V = -h_\alpha f'(h)/h$ olduğunu gösteriniz.

• Manyetik iş, manyetik alan ve mıknatıslanma yoğunluğunun çarpımıdır, ve (Gibbs) kanonik topluluğundaki üstel ağırlığın argümanı olarak ortaya çıkar. Dolayısıyla, (Gibbs) bölüşüm fonksiyonunun h_α 'ya göre türevlerini alarak, mıknatıslanmayı "ortalamanın içinde" "aşağı" indirebiliriz:

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{1}{V} \left\langle \int d^d \mathbf{x} m_\alpha(\mathbf{x}) \right\rangle = \frac{1}{V} \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{m}(\mathbf{x}) \left(\int d^d \mathbf{x}' m_\alpha(\mathbf{x}') \right) e^{-\beta \mathcal{H}}}{\int \mathcal{D}\mathbf{m}(\mathbf{x}) e^{-\beta \mathcal{H}}} \\ &= \frac{1}{V} \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_\alpha} \int \mathcal{D}\mathbf{m}(\mathbf{x}) e^{-\beta \mathcal{H}} = \frac{1}{\beta V} \frac{\partial}{\partial h_\alpha} \ln Z = -\frac{\partial f}{\partial h_\alpha} \end{aligned}$$

Diğer bakımlardan dönme simetrisi olan bir sistem için, (Gibbs) serbest enerjisi sadece h 'nin genliğine bağlıdır, ve

$$\frac{\partial h}{\partial h_\alpha} = \frac{\partial \sqrt{h_\beta h_\beta}}{\partial h_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{2\delta_{\alpha\beta} h_\beta}{\sqrt{h_\beta h_\beta}} = \frac{h_\alpha}{h}$$

ifadesini kullanarak,

$$m_\alpha = -\frac{\partial f}{\partial h_\alpha} = -\frac{df}{dh} \frac{\partial h}{\partial h_\alpha} = -f' \frac{h_\alpha}{h}$$

elde ederiz.

(b) Alınganlık tensörü $\chi_{\alpha\beta} = \partial m_\alpha / \partial h_\beta$ ile $f''(h)$, \vec{m} , ve \vec{h} arasında bağıntı bulunuz.

• Şimdi, alınganlık tensörü

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= \frac{\partial m_\alpha}{\partial h_\beta} = \frac{\partial}{\partial h_\beta} \left(-\frac{h_\alpha}{h} f'(h) \right) = -\frac{\partial h_\alpha}{\partial h_\beta} \frac{1}{h} f' - \frac{\partial h^{-1}}{\partial h_\beta} h_\alpha f' - \frac{h_\alpha}{h} \frac{\partial f'}{\partial h_\beta} \\ &= -\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{h_\alpha h_\beta}{h^2} \right) \frac{f'}{h} - \frac{h_\alpha h_\beta}{h^2} f'' \end{aligned}$$

olarak elde edilir. f'' 'nü mıknatıslanma cinsinden ifade edebilmek için, (a) kısmının sonucunun genliğini alırız

$$m = |f'(h)| = -f'(h)$$

ve buradan

$$\chi_{\alpha\beta} = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{h_\alpha h_\beta}{h^2} \right) \frac{m}{h} + \frac{h_\alpha h_\beta}{h^2} \frac{dm}{dh}$$

elde ederiz.

(c) Enine ve boyuna alınganlıkların $\chi_e = m/h$ ve $\chi_b = -f''(h)$ olarak verildiğini gösteriniz, burada m , \vec{m} 'nin genliğidir.

• $(\delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta / h^2)$ matrisi, herhangi bir vektörün, manyetik alan doğrultusundaki projeksiyonunu kaldırdığı için

$$\begin{cases} \chi_b &= -f''(h) = \frac{dm}{dh} \\ \chi_e &= \frac{m}{h} \end{cases}$$

sonucunu çıkarırız. Alternatif olarak, koordinat sistemini $h_i = h\delta_{i1}$ ($i = 1, \dots, d$) olacak şekilde

seçeriz ve

$$\begin{cases} \chi_b = \chi_{11} = \left(\delta_{11} - \frac{h_1 h_1}{h^2} \right) \frac{m}{h} - \frac{h_1 h_1}{h^2} f''(h) = \frac{dm}{dh} \\ \chi_e = \chi_{22} = \left(\delta_{11} - \frac{h_2 h_2}{h^2} \right) \frac{m}{h} - \frac{h_2 h_2}{h^2} f''(h) = \frac{m}{h} \end{cases}$$

elde ederiz.

(d) Ne zaman kendiliğinden mıknatıslanma varsa, χ_e 'nin $\vec{h} \rightarrow 0$ iken ıraksadığı sonucunu çıkarınız. χ_b 'nin ıraksaması için önsel herhangi bir sebep var mı?

• $\lim_{h \rightarrow 0}$ olduğu sürece, enine alınganlık $h \rightarrow 0$ için açıkça ıraksar. Diğer taraftan, boyuna alınganlığın ıraksaması için ise benzer bir sebep yoktur. Landau-Ginzburg modelinin semer noktası yaklaşımından, mesela,

$$tm + 4um^3 + h = 0$$

elde ederiz, ki sıfır manyetik alanda, düzenli fazda ($t < 0$ için, $h = 0$ 'da $4um^2 = -t$ olduğu için)

$$\chi_b|_{h=0} = \left(\frac{dh}{dm} \right)^{-1} \Big|_{h=0} = (t - 3t)^{-1}, \text{ yani } \chi_b = \frac{1}{2|t|}$$

anlamına gelir.

NOT: Bu probleme, daha resimsel bir yaklaşım, aşağıdaki gibidir. Hamiltoniyen, \mathbf{h} 'nin etrafındaki dönüşler altında değişmez olduğu için, \mathbf{m} , \mathbf{h} 'ye paralel olmak zorundadır, yani

$$m_\alpha = \frac{h_\alpha}{h} \varphi(h)$$

burada, φ , manyetik alanın şiddetinin bir fonksiyonudur. Basitleştirmek için, $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_1$ alalım, \mathbf{e}_1 birim vektör olmak üzere, bu

$$\mathbf{m} = m\mathbf{e}_1 = \varphi(h)\mathbf{e}_1$$

olduğu anlamına gelir. Buradan, boylamsal alınganlık

$$\chi_b = \frac{\partial m_1}{\partial h_1} \Big|_{\mathbf{h}=h\mathbf{e}_1} = \frac{dm}{dh} = \varphi'(h)$$

olarak hesaplanır. Dikine alınganlığı hesaplamak için, önce, sistem eğer küçük bir harici manyetik alan tarafından tedirgin edilirse $\delta h\mathbf{e}_2$, m_1 'deki değişimin, simetriden dolayı, $\delta h > 0$ ve $\delta h < 0$ için aynı olduğuna dikkat edin, ki

$$m_1(h\mathbf{e}_1 + \delta h\mathbf{e}_2) = m_1(h\mathbf{e}_1) + \mathcal{O}(\delta h^2)$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial m_1}{\partial h_2} \Big|_{\mathbf{h}=h\mathbf{e}_1} = 0$$

Daha da ötesi, \mathbf{m} ve \mathbf{h} paralel olduğu için,

$$\frac{m_1(h\mathbf{e}_1 + \delta h\mathbf{e}_2)}{h} = \frac{m_2(h\mathbf{e}_1 + \delta h\mathbf{e}_2)}{\delta h}$$

ki buradan

$$m_2(h\mathbf{e}_1 + \delta h\mathbf{e}_2) = \frac{m_1(h\mathbf{e}_1)}{h} \delta h + \mathcal{O}(\delta h^3)$$

elde edilir, ve sonuçta

$$\chi_e = \left. \frac{\partial m_2}{\partial h_2} \right|_{\mathbf{h}=\mathbf{h}\mathbf{e}_1} = \frac{m}{h}$$

verir.

8. Spin dalgaları: $n = 2$ mıknatıslanmanın XY modelinde, d boyutlu bir ağın her konumuna bir birim vektör $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ($s_x^2 + s_y^2 = 1$) yerleştirilmiştir. En yakın komşuların spinlerini paralel tutmaya çalışan bir etkileşim vardır, yani

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

Hamiltoniyeni. $\langle ij \rangle$ gösterimi sıklıkla bütün *en yakın komşu* çiftleri (i, j) üzerinden toplamı göstermek için kullanılır.

(a) $Z = \int \prod_i d\vec{s}_i \exp(-\beta\mathcal{H})$ bölüşüm fonksiyonunu, $\{\vec{s}_i\}$ spinleri ile herhangi bir eksen arasındaki $\{\theta_i\}$ açıları üzerinden integral olarak yeniden yazın.

• Bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \int \prod_i d^2\vec{s}_i \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \right) \delta(\vec{s}^2 - 1)$$

olarak verilir. $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \cos(\theta_i - \theta_j)$ ve $d^2\vec{s}_i = ds_i d\theta_i s_i = d\theta_i$ olduğu için,

$$Z = \int \prod_i d\theta_i \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right)$$

elde ederiz.

(b) Düşük sıcaklıklarda ($K \gg 1$), $\{\theta_i\}$ açıları konumdan konuma yavaşça değişirler. Bu durumda, $-\beta\mathcal{H}$ 'i, $\{\theta_i\}$ 'de ikinci derece bir terim elde etmek için açın.

• Kosinüsleri, ikinci mertebeye kadar açmak

$$Z = e^{N_b K} \int \prod_i d\theta_i \exp \left(-\frac{K}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (\theta_i - \theta_j)^2 \right)$$

verir, burada N_b bağların toplam sayısıdır. Açılımdaki daha yüksek mertebeden terimler, büyük K için ihmal edilebilir, çünkü, integral $|\theta_i - \theta_j| \approx \sqrt{2/K}$ tarafından belirlenir.

(c) $d = 1$ için, tekrarlanan sınır koşullu L konum (yani kapalı bir zincir oluşturuyorlar) düşünün. İkinci dereceden ifadeyi köşegenleştiren normal modları θ_q (Fourier dönüşümü kullanarak) ve karşılık gelen özdeğerleri $K(q)$ bulun.

- L konumlu bir zincirde,

$$\theta_j = \sum_q \theta(q) \frac{e^{iqj}}{\sqrt{L}}$$

seçerek Fourier modlarına geçeriz. θ_j 'ler gerçel sayılar olduğu için,

$$\theta(-q) = \theta(q)^*$$

olmalıdır, ve tekrar eden sınır koşulları için, izin verilen q değerleri sınırlıdır:

$$\theta_{j+L} = \theta_j, \quad \Rightarrow \quad qL = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \frac{L}{2} \quad \text{ile}$$

Tek boyutlu Hamiltoniyen $\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_j (\theta_j - \theta_{j-1})^2$,

$$\theta_j - \theta_{j-1} = \sum_q \theta(q) \frac{e^{iqj}}{\sqrt{L}} (1 - e^{-iq})$$

eşitliğini kullanarak, Fourier bileşenleri cinsinden

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_{q,q'} \theta(q)\theta(q') \sum_j \frac{e^{i(q+q')j}}{L} (1 - e^{-iq}) (1 - e^{-iq'})$$

şeklinde yazılabilir. $\sum_j e^{i(q+q')j} = L\delta_{q,-q'}$ özdeşliğini kullanarak

$$\beta\mathcal{H} = K \sum_q |\theta(q)|^2 [1 - \cos(q)]$$

elde ederiz.

(d) Bir önceki kısımdaki sonuçları, d boyutlu, tekrarlanan sınır koşullu basit kübik ağa genelleştirin.

- d boyutlu bir sistemde, j indeksi, ağı tanımlayan bir vektörle yer değiştirir

$$j \mapsto \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d)$$

Dolayısıyla

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\alpha} (\theta_{\mathbf{j}} - \theta_{\mathbf{j}+\mathbf{e}_{\alpha}})^2$$

yazabiliriz, burada \mathbf{e}_{α} 'lar birim vektörlerdir $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_d = (0, \dots, 0, 1)\}$, ki bir boyutlu sonucu

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \theta(\mathbf{q})\theta(\mathbf{q}') \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{j}} \frac{e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{j}}}{L^d} (1 - e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}_{\alpha}}) (1 - e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{e}_{\alpha}})$$

ifadesine genelleştirir. Yeniden, \mathbf{j} üzerinden toplam, \mathbf{q} ve $-\mathbf{q}'$ 'nün eşit olması koşulunu getirir ve

$$\beta\mathcal{H} = K \sum_{\mathbf{q}} |\theta(\mathbf{q})|^2 \sum_{\alpha} [1 - \cos(q_{\alpha})]$$

(e) Bu modların serbest enerjiye ve ısı sığasına katkılarını hesaplayın. (Klasik bölüşüm fonksiyonunu hesaplayın, yani modları kuantize etmeyin.)

- $K(\mathbf{q}) \equiv 2K \sum_{\alpha} [1 - \cos(q_{\alpha})]$ ile,

$$Z = \int \prod_{\mathbf{q}} d\theta(\mathbf{q}) \exp \left[-\frac{1}{2} K(\mathbf{q}) |\theta(\mathbf{q})|^2 \right] = \prod_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{2\pi}{K(\mathbf{q})}}$$

olur ve karşılık gelen serbest enerji

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \left[\text{sabit} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \ln K(\mathbf{q}) \right]$$

veya süreklilik limitinde (\mathbf{q} uzayında, durum yoğunluğunun $(L/2\pi)^d$ olduğu gerçeğini kullanarak)

$$F = -k_B T \left[\text{sabit} - \frac{1}{2} L^d \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln K(\mathbf{q}) \right]$$

olur. $K \sim 1/T$ olduğu için, $T \rightarrow \infty$ 'de,

$$F = -k_B T \left[\text{sabit}' - \frac{1}{2} L^d \ln T \right]$$

yazabiliriz, ve konum başına ısı sığası

$$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \cdot \frac{1}{L^d} = \frac{k_B}{2}$$

olarak verilir. Bunun sebebi, konum başına potansiyel enerji depolayabilen tek bir serbestlik derecesi (açı) olmasıdır.

(f) $\langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{x}} \rangle = \Re \langle \exp [i\theta_{\mathbf{x}} - i\theta_0] \rangle$ için bir ifadeyi, farklı Fourier modlarının katkılarını ekleyerek bulun. Kendinizi $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ iken, sadece $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ olan modların kayda değer katkılar verdiğiğine ikna edin, ve bundan asimptotik limiti hesaplayın.

-

$$\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0 = \sum_{\mathbf{q}} \theta(\mathbf{q}) \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} - 1}{L^{d/2}}$$

ve $\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle$ ifadesindeki üsteli tam kareye tamamlarsak, yani

$$-\frac{1}{2} K(\mathbf{q}) |\theta(\mathbf{q})|^2 + i\theta(\mathbf{q}) \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} - 1}{L^{d/2}}$$

için, hemen

$$\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{|e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} - 1|^2}{2K(\mathbf{q})} \right\} = \exp \left\{ -\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})} \right\}$$

elde ederiz. 1'den daha büyük x için, integrali alınan ifadenin $q = 0$ 'da yüksekliği $\sim x^2/2K$ olan

bir tepesi vardır (kosinüsü küçük argümanları için açarak görülebileceği gibi). Buna ek olarak, integrali alınan ifadenin ilk boğumu, q arttıkça, $q \sim 1/x$ 'dedir. Bu gözlemlerden, büyük x 'ler için belirleyici davranışı belirleyebiliriz:

- $d = 1$ için, $\sim x^2/2K$ 'nın, $\sim 1/x$ uzunluğu boyunca integralini almamız lazım, ve dolayısıyla

$$\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle \sim \exp\left(-\frac{|x|}{2K}\right)$$

- $d = 2$ için, $\sim x^2/2K$ 'nin $\sim (1/x)^2$ 'lik bir alan üzerinden integralini almamız lazım. Tepenin sadece yükselişini almaktan daha iyi bir yaklaşıklık, büyük x 'lerde,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})} &\approx \int \frac{dq d\varphi q}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(qx \cos \varphi)}{Kq^2} \\ &= \int \frac{dq d\varphi}{(2\pi)^2} \frac{1}{Kq} - \int \frac{dq d\varphi}{(2\pi)^2} \frac{\cos(qx \cos \varphi)}{Kq} \end{aligned}$$

olarak verilir, veya, ilk terimde açısal integrali alırsak

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})} \approx \int^{1/|x|} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{Kq} + x\text{'de sonra gelen terimler}$$

elde ederiz, buradan

$$\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle \sim \exp\left(-\frac{\ln|x|}{2\pi K}\right) = |x|^{-\frac{1}{2\pi K}}, \quad x \rightarrow \infty \text{ iken}$$

buluruz.

- $d \geq 3$ için, $\sim x^2/2K$ 'nin $\sim (1/x)^3$ 'lük bir hacim üzerinden integralini almalıyız. Dolayısıyla, $x \rightarrow \infty$ iken, integralin x bağıllığı kalkar ve

$$\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle \rightarrow \text{sabit}$$

olur, ki büyük x 'lerde bağıllıkların yok olmadığı anlamına gelir. Bu sonuçlar, salınımların sadece küçük q 'larda önemli olduğuna dikkat ederek de elde edilebilir. $K(\mathbf{q}) \approx Kq^2/2$ açılımını kullanmak, problemi, bir önceki bölümde anlatıldığı gibi, Coulomb çekirdeğini $\int d^d \mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} / q^2$ hesaplamaya indirger.

(g) Enine alinganlığı $\chi_e \propto \int d^d \mathbf{x} \langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{x}} \rangle_c$ ifadesinden hesaplayın. Sistem boyutu L 'ye nasıl bağlıdır?

- Elimizde

$$\langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_0)} \rangle = \exp\left\{-\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})}\right\}$$

ve benzer şekilde

$$\langle e^{i\theta_{\mathbf{x}}} \rangle = \exp\left\{-\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{2K(\mathbf{q})}\right\}$$

var. Dolayısıyla, bağlantılı bağdaşıklık fonksiyonu

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle_c = \langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_{\mathbf{0}})} \rangle_c = \langle e^{i(\theta_{\mathbf{x}} - \theta_{\mathbf{0}})} \rangle - \langle e^{i\theta_{\mathbf{x}}} \rangle \langle e^{i\theta_{\mathbf{0}}} \rangle$$

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle_c = e^{-\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{K(\mathbf{q})}} \left\{ \exp \left[\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})} \right] - 1 \right\}$$

olarak verilir. $d \geq 3$ 'de x bağımlı integral, $x \rightarrow \infty$ iken yok olur. Dolayısıyla, üstelini büyük x için açarak

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle_c \sim \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{K(\mathbf{q})} \approx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})}{Kq^2} = \frac{1}{K} C_d(x) \sim \frac{1}{K|x|^{d-2}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, enine alınganlık

$$\chi_e \propto \int d^d x \langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle_c \sim \frac{L^2}{K}$$

olarak ıraksar.

(h) $d = 2$ 'de, χ_e 'nin sadece K 'nın belirli bir kritik değerden, $K_c = 1/(4\pi)$, büyük olması durumunda ıraksadığını gösteriniz.

• $d = 2$ 'de, uzun erimli düzen yoktur, $\langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \rangle = 0$ ve

$$\langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle_c = \langle \vec{s}_{\mathbf{x}} \cdot \vec{s}_{\mathbf{0}} \rangle \sim |x|^{-1/(2\pi K)}$$

bundan dolayı, alınganlık

$$\chi_e \sim \int^L d^2 x |x|^{-1/(2\pi K)}$$

$1/(2\pi K) > 2$ için, $K_c = 1/(4\pi)$ 'nin altındaki K için yakınsar. $K > K_c$ için, alınganlık

$$\chi_e \sim L^{2-2K_c/K}$$

olarak ıraksar.

9. Kılcal Dalgalar: d boyutta, makul düzeyde düz bir yüzey, h yüksekliği ile, geri kalan $d - 1$ tane koordinatın $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ fonksiyonu olarak tarif edilebilir. Genelleştirilmiş alanın $\mathcal{A} = \int d^{d-1} \mathbf{x} \sqrt{1 + (\nabla h)^2}$ şeklinde yazılabileceğine kendinizi ikna ediniz. σ yüzey gerilimi ile, Hamiltoniyen basitce $\mathcal{H} = \sigma \mathcal{A}$ olur.

(a) Yeterince düşük sıcaklıklarda, h 'nin sadece yavaş değişimleri vardır. Enerjiyi ikinci dereceye kadar açın, ve bölüşüm fonksiyonunu yol integrali olarak yazın.

•

$$x_d = h(x_1, \dots, x_{d-1})$$

yükseklik fonksiyonu ile parametrize edilen bir yüzey için, alan elemanı

$$dA = \frac{1}{\cos \alpha} dx_1 \dots dx_{d-1}$$

olarak hesaplanabilir, burada α , d 'inci yön ile yüzeye dik

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial h}{\partial x_{d-1}}, 1 \right)$$

vektörü ($n^2 = 1$) arasındaki açıdır. $\cos \alpha = n_d = [1 + (\nabla h)^2]^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(\nabla h)^2$ olduğu için

$$\mathcal{H} = \sigma \mathcal{A} \approx \sigma \int d^{d-1}x \left\{ 1 + \frac{1}{2}(\nabla h)^2 \right\}$$

elde ederiz, ve çarpan sabitleri bırakırsak,

$$Z = \int \mathcal{D}h(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\beta \frac{\sigma}{2} \int d^{d-1}x (\nabla h)^2 \right\}$$

buluruz.

(b) İkinci dereceden Hamiltoniyeni, normal modları $\{h_{\mathbf{q}}\}$ (kılcık dalgalar) cinsinden köşegenleştirmek için, Fourier dönüşümünü kullanın.

• Fourier modlarına

$$h(\mathbf{x}) = \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} h(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

değişken değiştirdikten sonra, bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \int \mathcal{D}h(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\beta \frac{\sigma}{2} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} q^2 |h(\mathbf{q})|^2 \right\}$$

olarak verilir.

(c) Bu Goldstone modları için hangi simetri kırılması sorumludur?

• Belirli bir yükseklik seçerek, temel durum, d 'inci yöndeki öteleme simetrisini kırar. $h(\mathbf{x}) \rightarrow h(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x})$ dönüşümü, $\xi(\mathbf{x})$ sabit ise, enerjiyi değiştirmez. Süreklilikten dolayı, $\xi(\mathbf{x})$ 'i istediğimiz kadar yavaş değiştirerek, enerjiyi istediğimiz kadar az değiştirebiliriz.

(d) Yükseklik-yükseklik bağıdaşlıklarını hesaplayın $\langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}'))^2 \rangle$

•

$$h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}') = \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} h(\mathbf{q}) \left(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} \right)$$

ifadesinden

$$\langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}'))^2 \rangle = \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{d^{d-1}q'}{(2\pi)^{d-1}} \langle h(\mathbf{q}) h(\mathbf{q}') \rangle \left(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'} \right) \left(e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}} - e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'} \right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, yükseklik-yükseklik bağıdaşlıkları

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &\equiv \langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}'))^2 \rangle \\ &= \frac{2}{\beta\sigma} \int \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1 - \cos[\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] }{q^2} = \frac{2}{\beta\sigma} C_{d-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

şeklinde davranır.

(e) (d)'deki sonucu $d = 4, 3, 2$ ve 1 'de yorumlayın

- Artık, Coulomb çekirdeğinin, büyük $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ için asimptotik davranışını, ya problem 1(f)'in sonuçlarını, ya da derste verilen tam şeklini kullanarak tartışabiliriz.

- $d \geq 4$ 'te, $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow$ sabit, ve yüzey düzdür.

- $d = 3$ 'de, $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sim \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, ve üç boyutta, saşırtıcı, asimptotik olarak düz bir yüzey olmadığı, sonucuna ulaşırız. Bu, teknik olarak doğru olsa da, logaritma çok yavaş büyüdüğü için, makul salınımlar görebilmek için, çok büyük yüzeyler gerekmektedir.

- $d = 2$ 'de, $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. $h(x)$ arayüzünün, rastgele yürüyüşçünün yoluna $x(t)$ benzediğini, ve benzer ($x \sim \sqrt{t}$) salınımlara sahip olduğunu fark edince, bu sonuç kolayca anlaşılabilir. • $d = 1$ 'de, $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$. 'Nokta' arayüzün enine salınımları çok büyüktür, ve metinde tartışıldığı gibi, yaklaşırmalar geçerli değildir.

(f) ∇h için tipik değerleri tahmin ederek, \mathcal{A} 'nın açılımındaki daha yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesinin haklı olup olmadığını yorumlayın.

- $(\nabla h)^2$ 'yi

$$\frac{\langle (h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}'))^2 \rangle}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{1-d}$$

şeklinde tahmin edebiliriz. $d \geq d_\ell = 1$ için, gradyanın tipik büyüklüğü, kabalaştırma sonucu azalır. Dolayısıyla, daha önce kullanılan alanın gradyan açılımı geçerlidir. $d \leq d_\ell$ boyutları için, gradyan açılımı fikri artık tamamen anlamsız olur.

10. Süperiletkenlerde Ayar Salınımları: Süperiletkenliğin Landau-Ginzburg modeli

$$\beta\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{t}{2} |\Psi|^2 + u |\Psi|^4 + \frac{K}{2} D_\mu \Psi D_\mu^* \Psi^* + \frac{L}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right]$$

Hamiltoniyenine tabi olan karmaşık bir düzen parametresi $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_1(\mathbf{x}) + i\Psi_2(\mathbf{x})$ ve elektromanyetik vektör potansiyeli $\vec{A}(\mathbf{x})$ tasvir eder. Ayar değişmez türev $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(\mathbf{x})$, iki alan arasındaki etkileşimi tanımlar. (Cooper çift parametreleri cinsinden, $e = e^*c/\hbar$, $K = \hbar^2/2m^*$.)

(a) Yukarıdaki Hamiltoniyenin, yerel ayar dönüşümleri altında değişmez olduğunu gösteriniz:

$$\Psi(\mathbf{x}) \mapsto \Psi(\mathbf{x}) \exp(i\theta(\mathbf{x})), \quad \text{ve} \quad A_\mu(\mathbf{x}) \mapsto A_\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta$$

- Yerel ayar dönüşümü altında, $\beta\mathcal{H} \mapsto$

$$\int d^3x \left\{ \frac{t}{2} |\Psi|^2 + u |\Psi|^4 + \frac{K}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu - i\partial_\mu \theta) \Psi e^{i\theta}] [(\partial_\mu + ieA_\mu + i\partial_\mu \theta) \Psi^* e^{-i\theta}] + \frac{L}{2} \left(\nabla \times \vec{A} + \nabla \times \frac{1}{e} \nabla \theta \right)^2 \right\}$$

Ancak, bu

$$(\partial_\mu - ieA_\mu - i\partial_\mu \theta) \Psi e^{i\theta} = e^{i\theta} (\partial_\mu - ieA_\mu) \Psi = e^{i\theta} D_\mu \Psi$$

ve

$$\nabla \times \frac{1}{e} \nabla \theta = 0$$

olduğunan dolayı, yeniden $\beta\mathcal{H}$ 'den başkası değildir.

(b) $\Psi(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}$ ve $\vec{A}(\mathbf{x}) = 0$ şeklinde bir semer noktası çözümünü olduğunu gösterin, ve $t > 0$ ve $t < 0$ için $\bar{\Psi}$ 'i bulun.

• Semer noktası çözümleri,

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Psi^*} = 0, \quad \implies \quad \frac{t}{2}\bar{\Psi} + 2u\bar{\Psi}|\bar{\Psi}|^2 - \frac{K}{2}D_\mu D_\mu \bar{\Psi} = 0$$

ve

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\delta A_\mu} = 0, \quad \implies \quad \frac{K}{2}(-ie\bar{\Psi}D_\mu^*\Psi^* + ie\Psi^*D_\mu\bar{\Psi}) - L\epsilon_{\alpha\beta\mu}\epsilon_{\alpha\gamma\delta}\partial_\beta\partial_\gamma A_\delta = 0$$

ifadelerinden elde edilir. $\Psi(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}$, $\vec{A} = 0$ tahmini, açıkça bu denklemleri çözer. O zaman, ilk denklem

$$t\bar{\Psi} + 4u\bar{\Psi}|\bar{\Psi}|^2 = 0$$

halini alır ve burada ($u > 0$ için) $t > 0$ için $\bar{\Psi} = 0$ çıkarken, $t < 0$ için $|\bar{\Psi}|^2 = -t/4u$ çıkar.

(c) $t < 0$ için,

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}) = (\bar{\Psi} + \phi(\mathbf{x})) \exp(i\theta(\mathbf{x})), \\ A_\mu(\mathbf{x}) = a_\mu(\mathbf{x}), \quad \text{Coulomb ayarında } \partial_\mu a_\mu = 0 \text{ olmak üzere} \end{cases}$$

seçerek, ve $\beta\mathcal{H}$ 'i ϕ , θ , ve \vec{a} cinsinden ikinci dereceye kadar açarak, salınımların maliyetini hesaplayınız.

• Basitleştirmek için, $\bar{\Psi}$ 'i gerçel seçelim. Hamiltoniyendeki

$$D_\mu \bar{\Psi} D_\mu^* \Psi^* = \left[(\partial_\mu - ie a_\mu)(\bar{\Psi} + \phi) e^{i\theta} \right] \left[(\partial_\mu + ie a_\mu)(\bar{\Psi} + \phi) e^{-i\theta} \right]$$

teriminden, aşağıdaki ikinci dereceden katkıyı elde ederiz:

$$\bar{\Psi}^2 (\nabla\theta)^2 + (\nabla\phi)^2 - 2e\bar{\Psi}^2 a_\mu \partial_\mu \theta + e^2 \bar{\Psi}^2 |\vec{a}|^2$$

Yukarıdaki ifadede, üçüncü terimin integrali sıfırdır (kısmi integrasyon yaparak, ve Coulomb ayar koşulunu $\partial_\mu a_\mu = 0$ kullanarak kolayca gösterilebileceği gibi). Dolayısıyla, ikinci dereceden terim

$$\beta\mathcal{H}^{(2)} = \int d^3x \left\{ \left(\frac{t}{2} + 6u\bar{\Psi}^2 \right) \phi^2 + \frac{K}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{K}{2} \bar{\Psi}^2 (\nabla\theta)^2 + \frac{K}{2} e^2 \bar{\Psi}^2 |\vec{a}|^2 + \frac{L}{2} (\nabla \times \vec{a})^2 \right\}$$

olur.

(d) Fourier dönüşümü yapın, ve $\langle |\phi(\mathbf{q})|^2 \rangle$, $\langle |\theta(\mathbf{q})|^2 \rangle$ ve $\langle |\vec{a}(\mathbf{q})|^2 \rangle$ beklenen değerlerini hesaplayın.

- Fourier dönüşümleri cinsinden

$$\beta\mathcal{H}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left(\frac{t}{2} + 6u\bar{\Psi}^2 + \frac{K}{2}q^2 \right) |\phi(\mathbf{q})|^2 + \frac{K}{2}\bar{\Psi}^2q^2|\theta(\mathbf{q})|^2 + \frac{K}{2}e^2\bar{\Psi}^2|\vec{a}(\mathbf{q})|^2 + \frac{L}{2}(\mathbf{q} \times \vec{a})^2 \right\}$$

elde ederiz. Coulomb ayarında, $\mathbf{q} \perp \vec{a}(\mathbf{q})$ ve dolayısıyla $[\mathbf{q} \times \vec{a}(\mathbf{q})]^2 = q^2|\vec{a}(\mathbf{q})|^2$. Bu köşegenel şekil, hemel ($t < 0$ için)

$$\begin{aligned} \langle |\phi(\mathbf{q})|^2 \rangle &= \left(t + 12u\bar{\Psi}^2 + Kq^2 \right)^{-1} = \frac{1}{Kq^2 - 2t} \\ \langle |\theta(\mathbf{q})|^2 \rangle &= \left(K\bar{\Psi}^2q^2 \right)^{-1} = -\frac{4u}{Ktq^2} \\ \langle |\vec{a}(\mathbf{q})|^2 \rangle &= 2 \left(Ke^2\bar{\Psi}^2 + Lq^2 \right)^{-1} = \frac{2}{Lq^2 - Ke^2t/4u} \quad (\vec{a}'\text{nın iki bileşeni vardır}) \end{aligned}$$

Ayar alanı, orijinal teoride “kütle-siz” olan, düzen parametresine çiftleniminden dolayı $Ke^2t/4u$ kütle kazanır. Bu, Higgs mekanizması olarak bilinir.

11. Üçlü kritik nokta etrafında salınımlar: Bir önceki problemde gösterildiği gibi,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x} \left[\frac{K}{2}(\nabla m)^2 + \frac{t}{2}m^2 + um^4 + vm^6 \right]$$

Hamiltoniyeni $u = 0$ ve $v > 0$ ile, üçlü kritik noktayı tanımlar.

(a) Semer noktası yaklaşıklığını kullanarak, $t \rightarrow 0$ iken ısı sıçması tekilliğini hesaplayın.

- Bir önceki problemde hesaplandığı gibi, serbest enerjinin semer noktası, en küçük değerini aldığı $\bar{m} = \bar{m}\hat{e}_\ell$,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right|_{\bar{m}} = \bar{m}(t + 6v\bar{m}^4) = 0$$

ifadesinden

$$\bar{m} = \begin{cases} 0 & t > \bar{t} = 0 \quad \text{için} \\ \left(-\frac{t}{6v}\right)^{1/4} & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

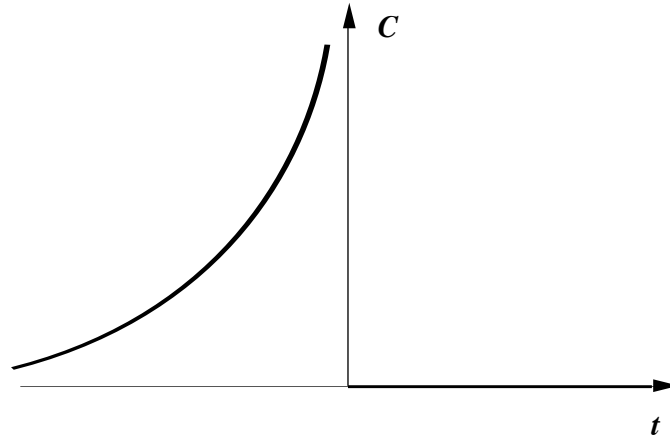
olarak elde edilir. Karşılık gelen serbest enerji yoğunluğu

$$\Psi(\bar{m}) = \frac{t}{2}\bar{m}^2 + v\bar{m}^6 = \begin{cases} 0 & t > 0 \quad \text{için} \\ -\frac{1}{3}\frac{(-t)^{3/2}}{(6v)^{1/2}} & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

Dolayısıyla, ısı sıçmasının tekil davranışı

$$C = C_{s.n.} \sim -T_c \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right|_{\bar{m}} = \begin{cases} 0 & t > 0 \quad \text{için} \\ \frac{T_c}{4}(-6vt)^{-1/2} & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

olarak verilir, ve aşağıdaki şekilde kabaca gösterilmiştir.



(b)

$$\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x})) \hat{e}_b + \sum_{\alpha=2}^n \phi_e^\alpha(\mathbf{x}) \hat{e}_\alpha$$

seçerek ve $\beta\mathcal{H}$ 'i ikinci dereceye kadar açarak boylamsal ve enine salınımların ikisini de dahil edin.

•

$$\vec{m}(\mathbf{x}) = (\bar{m} + \phi_b(\mathbf{x})) \hat{e}_b + \sum_{\alpha=2}^n \phi_e^\alpha(\mathbf{x}) \hat{e}_\alpha$$

seçerek, boylamsal ve enine salınımları dahil edelim, burada \hat{e}_b ve \hat{e}_α , n vektörlü ortanormal bir küme oluştururlar. Dolayısıyla, serbest enerji, $\beta\mathcal{H}$, ϕ_b ve ϕ_e 'nin bir fonksiyonudur. $\bar{m}\hat{e}_b$ 'de en küçük değerinde olduğu için, $\beta\mathcal{H}$ 'in ϕ cinsinden açılımından, doğrusal bir terim yoktur. Serbest enerjideki her terimin açılımdaki ikinci dereceden terime katkıları

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{m})^2 &\implies (\nabla \phi_b)^2 + \sum_{\alpha=2}^n (\nabla \phi_e^\alpha)^2 \\ (\vec{m})^2 &\implies (\phi_b)^2 + \sum_{\alpha=2}^n (\phi_e^\alpha)^2 \\ (\vec{m})^6 &= ((\vec{m})^2)^3 = (\bar{m}^2 + 2\bar{m}\phi_b + \phi_b^2 + \sum_{\alpha=2}^n (\phi_e^\alpha)^2)^3 \implies 15\bar{m}^4(\phi_b)^2 + 3\bar{m}^4 \sum_{\alpha=2}^n (\phi_e^\alpha)^2 \end{aligned}$$

olur. Şimdi, $\beta\mathcal{H}$ 'in ikinci dereceden açılımı

$$\beta\mathcal{H}(\phi_b, \phi_e^\alpha) = \beta\mathcal{H}(0, 0) + \int d^d \mathbf{x} \left\{ \left[\frac{K}{2} (\nabla \phi_b)^2 + \frac{\phi_b^2}{2} (t + 30v\bar{m}^4) \right] + \sum_{\alpha=2}^n \left[\frac{K}{2} (\nabla \phi_e^\alpha)^2 + \frac{(\phi_e^\alpha)^2}{2} (t + 6v\bar{m}^2) \right] \right\}$$

verir. Formal olarak,

$$\beta\mathcal{H}(\phi_b, \phi_e^\alpha) = \beta\mathcal{H}(0, 0) + \beta\mathcal{H}_b(\phi_b) + \sum_{\alpha=2}^n \beta\mathcal{H}_{e_\alpha}(\phi_e^\alpha)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz, burada $\beta\mathcal{H}_i(\phi_i)$, $i = b, e_\alpha$ olmak üzere, genel olarak

$$\beta\mathcal{H}_i(\phi_i) = \frac{K}{2} \int d^d\mathbf{x} \left[(\nabla\phi_i)^2 + \frac{\phi_i^2}{\xi_i^2} \right]$$

ile verilir, burada bağdaşıklık uzunluklarının tersi

$$\xi_b^{-2} = \begin{cases} \frac{t}{K} & t > 0 \text{ için} \\ \frac{-4t}{K} & t < 0 \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$\xi_{e_\alpha}^{-2} = \begin{cases} \frac{t}{K} & t > 0 \text{ için} \\ 0 & t < 0 \text{ için} \end{cases}$$

Mıknatısın kritik noktası için derslerde gösterildiği gibi, $t > 0$ için, boylamsal ve enine bileşenler arasında bir fark yokken, $t < 0$ için, *düzenli* durumun dönme simetrisinden dolayı, ϕ_e^α Goldstone modları için geri çeken bir kuvvet yoktur.

(c) Boylamasına ve enlemesine bağdaşıklık fonksiyonlarını hesaplayın

• Harmonik yaklaşıklıkta, $\beta\mathcal{H}$, salınan farklı bileşenlere ϕ_b, ϕ_e^α ait Hamiltoniyenlerin toplamı haline geldiği için, bu nicelikler birbirlerinden bağımsızdır, yani

$$\langle \phi_b \phi_e^\alpha \rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \langle \phi_e^\gamma \phi_e^\alpha \rangle = 0 \quad \alpha \neq \gamma \quad \text{ise}$$

Boylamsal ve enine bağdaşıklık fonksiyonlarını belirlemek için, önce, serbest enerjiyi Fourier modları cinsinden ifade ederiz, böylece belirli bir salınım dizilimi için olasılık

$$\mathcal{P}(\{\phi_b, \phi_e^\alpha\}) \propto \prod_{\mathbf{q}, \alpha} \exp \left\{ -\frac{K}{2} (q^2 + \xi_b^{-2}) |\phi_{b,\mathbf{q}}|^2 \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{K}{2} (q^2 + \xi_{d_\alpha}^{-2}) |\phi_{d_\alpha,\mathbf{q}}^\alpha|^2 \right\}$$

olarak verilir, Dolayısıyla, derslerde de gösterildiği gibi, bağdaşıklık fonksiyonu

$$\langle \phi_\alpha(\mathbf{x}) \phi_\beta(0) \rangle = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{VK} \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{q^2 + \xi_\alpha^{-2}} = -\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{K} I_d(\mathbf{x}, \xi_\alpha)$$

olur ve bundan dolayı

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) \phi_b(0) \rangle = -\frac{1}{K} I_d(\mathbf{x}, \xi_b)$$

ve

$$\langle \phi_e^\alpha(\mathbf{x}) \phi_e^\beta(0) \rangle = -\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{K} I_d(\mathbf{x}, \xi_{d_\alpha})$$

(d) Semer noktası serbest enerjisine, salınımlardan gelen ilk düzeltmeyi hesaplayın.

• Salınımlardan semer noktası serbest enerjisine gelen ilk düzeltmeleri hesaplayalım. Bölüşüm fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 Z &= e^{-\beta\mathcal{H}(0,0)} \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\frac{K}{2} \int d^d\mathbf{x} [(\nabla\phi)^2 + \xi^{-2}\phi^2] \right\} \\
 &= e^{-\beta\mathcal{H}(0,0)} \int \prod_{\mathbf{q}} d\phi_{\mathbf{q}} \exp \left\{ -\frac{K}{2} \sum_{\mathbf{q}} (q^2 + \xi^{-2}) \phi_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}}^* \right\} \\
 &= \prod_{\mathbf{q}} [K(q^2 + \xi^{-2})]^{-1/2} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} (Kq^2 + K\xi^{-2}) \right\}
 \end{aligned}$$

olur, ve serbest enerji yoğunluğu

$$\beta f = \frac{\beta\mathcal{H}(0,0)}{V} + \begin{cases} \frac{n}{2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \ln(Kq^2 + t) & t > 0 \quad \text{için} \\ \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \ln(Kq^2 - 4t) + \frac{n-1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \ln(Kq^2) & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

ifadesine eşittir.

(e) Isı sıçasına salınım düzeltmesini bulun.

• $C = -T(d^2 f / dT^2)$ olduğu için, ısı sıçasına, salınımlardan gelen katkı

$$C - C_{s.n.} \propto \begin{cases} \frac{n}{2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} (Kq^2 + t)^{-2} & t > 0 \quad \text{için} \\ \frac{16}{2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} (Kq^2 - 4t)^{-2} & t < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

olarak verilir. Bu integraller $d = 4$ 'te davranışlarını değiştirirler. $d > 4$ için, integraller büyük q 'de ıraksarlar, ve $\Delta \simeq 1/a$ üst sınırı tarafından belirlenirler. Bundan dolayı, salınımlar geçişin iki tarafında sabit bir terim ekler, ve semer noktası çözümünü, nicel yapısını korur. Diğer taraftan, $d < 4$ için, integraller karşılık gelen bağdaşıklık uzunluğu ξ^{4-d} ile orantılıdır. ξ 'in ıraksamasından dolayı, salınımlardan kaynaklı düzeltmeler

$$C_{sal} = C - C_{s.n.} \propto K^{-d/2} |t|^{d/2-2}$$

olarak ıraksar.

(f) (a) ve (e) bölümlerindeki sonuçları $t < 0$ için kıyaslayarak, Ginzburg Kriterini, ve üçlü kritik noktada ortalama-alan kuramının geçerliliği için üst kritik boyutu elde edin.

• Ginzburg kriterini elde etmek için, $t < 0$ 'a bakalım. Bu bölgede, semer noktası katkısı zaten $C_{s.n} \propto (-bt)^{-1/2}$ olarak ıraksar, böylece

$$\frac{C_{sal}}{C_{s.n}} \propto (-t)^{\frac{d-3}{2}} \left(\frac{v}{K^d} \right)^{1/2}$$

Bundan dolayı, $t < 0$ 'da, semer noktası yaklaşımı $d > 3$ olduğu sürece, bu oranı belirler. $d < 3$ için, ortalama alan sonucu, kritik noktadan uzakta belirleyici olmaya devam eder, yani eğer

$$(-t)^{d-3} \gg \left(\frac{K^2}{v} \right), \quad \text{veya,} \quad |t| \gg \left(\frac{K^d}{v} \right)^{1/(d-3)}$$

Aksi takdirde, yani eğer

$$t < \left(\frac{K^d}{v} \right)^{1/(d-3)},$$

ısı sığasına salınımların katkısı belirleyicidir. Dolayısıyla, üçlü kritik noktanın üst kritik boyutu $d = 3$ 'tür.

(g) Genelleştirilmiş çoklu kritik nokta, vm^6 yerine, $u_{2n}m^{2n}$ yazılarak tasvir edilebilir. Basit kuvvet saymayı kullanarak, bu çoklu kritik noktanın üst kritik boyutunu bulun.

• Eğer vm^6 yerinde, genel bir $u_{2n}m^{2n}$ şeklinde bir terimimiz varsa, sonuçlarımızı kolayca genelleştirebiliriz:

$$\bar{m} \propto (-t)^{1/(2n-2)}, \quad \Psi(\bar{m}) \propto (-t)^{n/(n-1)}, \quad C_{s,n} \propto (-t)^{n/(n-1)-2}$$

Dahası, herhangi bir n için, salınımların ısı sığasına katkısı öncekiyle aynıdır:

$$C_{sal.} \propto (-t)^{d/2-2}$$

Bundan dolayı, üst kritik boyut, genel olarak,

$$\frac{d}{2} - 2 = \frac{n}{n-1} - 2, \quad \text{veya,} \quad d_u = \frac{2n}{n-1}$$

denklemlerle belirlenir.
