8.334 İstatistiksel Mekanik II: Alanların İstatistiksel Fiziği
2008 Bahar

Tekrar Problemleri

Test, 'kapalı kitaptır,' ancak isterseniz, tek-taraflı formül sayfası getirebilirsiniz. Bu sayfanın amacı, önemli formül ve denklemleri hatırlatmaktır, ve buradaki cevapların kısa yazımı değildir. Bu ayrıcalık kötüye kullanılırsa, ilerideki sınavlarda geri alınacaktır. Test, tamamen aşağıdaki soruların bir alt kümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla bu sorularla yakınsanız ve rahatsanız, herhangi bir sürpriz olmayacak!

****

1: *Sürekli Spinler:* Standart $\mathcal{O}(n)$ modelinde, n bileşenli birim vektörler, bir ağın konumlarına yerleştirilirler. En yakın komşu spinler $J\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$ bağı ile birbirine bağlanır. Aslında, biz sadece evrensel özellikleriyle ilgileniyorsak, herhangi bir genelleştirilmiş etkileşim $f(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)$ aynı kritik davranışa yol açar. İsing modeline benzetmeyle, uygun bir tercih

$$\exp\left[f(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j)\right] = 1 + (nt)\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

olur, ki *ilmek modeli*ne yol açar:

(a) İki boyutlu *altıgenel* (balpeteği) ağda, (Z bölüşüm fonksiyonu için) t parametresi cinsinden, yüksek sıcaklık açılımını yapın.

(b) $n \to 0$ limitinin, ağ üzerinde, kendinden kaçan tek bir polimerin dizilimlerini tasvir ettiğini gösterin.

****

2: *Potts model I:* $-\beta\mathcal{H} = K\sum_{<ij>}\delta_{s_i,s_j}$ Hamiltoniyeni ile etkileşen Potts spinlerini $s_i = (1, 2, \cdots, q)$ düşünün.

(a) Bu problemi, yüksek sıcaklıklarda grafiksel olarak incelemek için, her bağ için Boltzmann ağırlığını

$$\exp(K\delta_{s_i,s_j}) = C(K)\left[1 + T(K)g(s_i, s_j)\right]$$

olarak yazın, burada $g(s, s') = q\delta_{s,s'} - 1$. $C(K)$ ve $T(K)$'yı bulun.

(b)

$$\sum_{s=1}^{q} g(s, s') = 0\ , \quad \sum_{s=1}^{q} g(s_1, s)g(s, s_2) = qg(s_1, s_2)\ , \text{ ve } \sum_{s,s'}^{q} g(s, s')g(s', s) = q^2(q-1)$$

olduğunu gösterin.

(c) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, tek boyutlu bir zincir için, serbest enerjiyi ve bağdaşıklık fonksiyonunu $\langle g(s_m, s_n)\rangle$ hesaplayın.

(d) Kare ağ üzerindeki bölüşüm fonksiyonunu T^4 mertebesine kadar hesaplayın. Bu problemin düşük sıcaklık açılımındaki ilk terimi de hesaplayın.

(e) Düşük sıcaklık ve yüksek sıcaklık serilerindeki ilk terimleri kıyaslayarak, Potts modeli için bir eşleklik kuralı bulun. Yüksek mertebeden diyagramları merak etmeyin, onlarda da çalışacak!

Tek bir geçiş sıcaklığı olduğunu varsayarak, $K_c(q)$'nun değerini bulun.
(f) Potts modeli için yüksek sıcaklık açılımındaki daha yüksek dereceden terimler, İsing modelininkilerden nasıl farklanır. $q = 2$ için grafikleri birbirinden ayıran temel fark nedir? (Bu, neden sadece İsing modelinin çözülebilir olduğunun esas sebebidir.)

****

3. *Potts modeli II:* Alternatif bir açılım

$$\exp\left[K\delta(s_i, s_j)\right] = 1 + v(K)\delta(s_i, s_j)$$

açılımından başlanarak elde edilir, burada $v(K) = e^K - 1$. Bu durumda, spinler üzerinden toplam, herhangi bir diyagramı götür*mez*, ve hertürlü bağları ağ üzerinde rastgele dağıtma tercihi kabul edilebilir.
(a) $h = \sum_i \delta_{s_i,1}$ manyetik alanını dahil ederek, bölüşüm fonksiyonunun

$$Z(q, K, h) = \sum_{\text{bütün diyagramlar}} \; \sum_{\text{diyagramdaki bütün } c \text{ kümeleri}} \left[v^{n_b^c} \times \left(q - 1 + e^{hn_s^2}\right)\right]$$

şeklini aldığını gösterin, burada n_b^c ve n_s^c, c kümesindeki bağ ve konumların sayısıdır. Bu *rastgele küme açılımı* olarak bilinir.
(b) $q \to 1$ limitinin *süzülme* problemine, ki bu problemde bağlar ağ üzerine $p = v(v + 1)$ olasılığı ile rastgele dağıtılır, denk olduğunu gösterin. Kare ağda, süzülme eşiği nedir?
(c) $q \to 0$ limitinde, ilk derecede, sadece tek bir bağlantılı kümenin katkı verdiğini gösterin. Bütün böyle kümelerin numaralanması *dallanmış ağ hayvanları*nın listelenmesi olarak bilinir.

****

4. *Potts eşlekliği:* N konumlu *kare bir ağa* yerleştirilmiş Potts spinlerini düşünün, $s_i = (1, 2, \cdots, q)$, öyle ki en yakın komşularıyla

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{<ij>} \delta_{s_i,s_j}$$

Hamiltoniyeniyle etkileşsinler.
(a) Yüksek ve düşük sıcaklık serilerindeki ilk birkaç terimi kıyaslayarak, veya başka herhangi bir yöntemle, bölüşüm fonksiyonunun, bir Ξ fonksiyonu için

$$Z(K) = qe^{2NK}\Xi\left[e^{-K}\right] = q^{-N}\left[e^K + q - 1\right]^{2N}\Xi\left[\frac{e^K - 1}{e^K + (q - 1)}\right]$$

özelliğinin olduğunu gösterin, ve buradan $K_c(q)$ kritik noktasını bulun.
(b) $Z(K)$ için eşleklik ifadesinden, iç enerji $U(K) = \langle\beta\mathcal{H}\rangle = -\partial \ln Z/\partial \ln K$ için benzer bir ilişki çıkarın. Bu sonucu kullanarak, U'nun kritik noktadaki tam değerini hesaplayın.

****

5. *Eşyönsüz Rastgele Yürümeler:* Kare ağ üzerinde, $(0,0)$ orijin noktasından başlayan bütün rastgele yürüyüş topluluğunu düşünün. Her yürüyüşün ağırlığı $t_x^{l_c} \times t_y^{\ell_y}$ olur, burada ℓ_x ve ℓ_y, sırasıyla, x ve y yönündeki adımların sayısıdır.
(a) (x,y)'de biten bütün yürüyüşlerin toplam ağırlığını $W(x,y)$ hesaplayın. W'nın sadece $\bar{t} = (t_x + t_y)/2 < t_c = 1/4$ için iyi tanımlı olduğunu gösterin.
(b) Büyük x ve y için, ve geçişe yakınken $W(x,y) =$ sabit eğrilerinin şekli nedir?
(c) Ortalama adım sayısı, $\langle \ell \rangle = \langle \ell_x + \ell_y \rangle$, $\bar{t}$ t_c'ye yaklaşırken nasıl ıraksar?

****

6. *Eşyönsüz İsing Modeli:* Kare ağ üzerinde, Hamiltoniyeni

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{x,y} (K_x \sigma_{x,y}\sigma_{x+1,y} + K_y \sigma_{x,y}\sigma_{x,y+1})$$

olan, yani x ve y yönlerindeki bağ kuvvetleri farklı olan, eşyönsüz İsing modelini düşünelim.
(a) Metinde tarif edilen yöntemi kullanarak, bu modelin serbest enerjisini hesaplayın. Çıkarımın her adımını yazmanız gerekmez. Sadece, eşyönsüzlükten dolayı değiştirilmesi gereken adımları gösterin; ve $\ln Z/N$ için sonucu hesaplayın.
(b) Serbest enerjinin tekilliğinden, kritik sınırı (K_x, K_y) düzleminde bulun. $K_x = \tilde{K}_y$ koşuluyla örtüştüğünü gösterin, burada $\tilde{K}$, K'ya standart eşlek etkileşimi gösterir.
(c) $\ln Z/N$'nin tekil kısmını bulun, ve eşyönsüzlüğün üstel ve genlik oranlarında kritik davranışı nasıl etkilediğini yorumlayın.

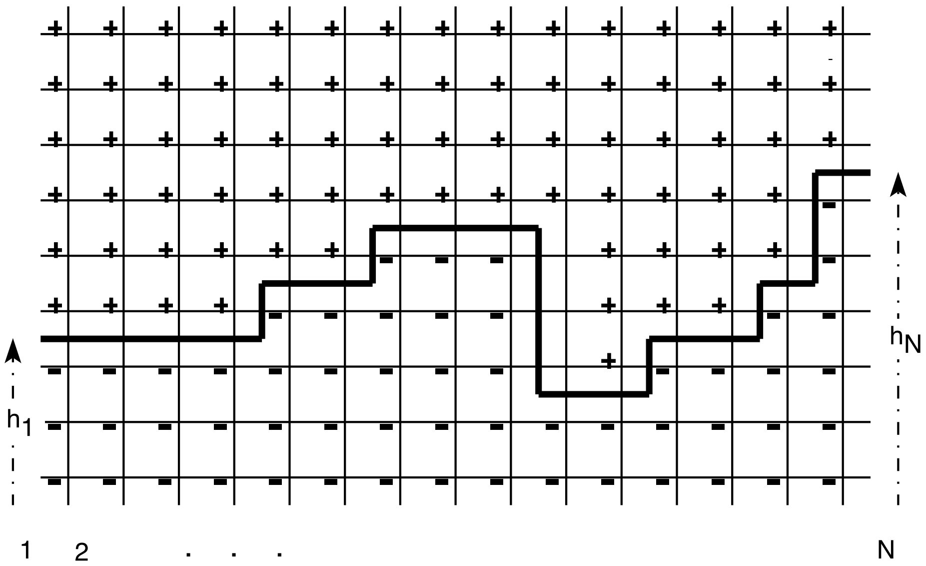
****

7. $d = 2$ İsing modelinin arayüz enerjisinin *Müller-Hartmann Zittartz tahmini:*
(a) Kare ağda, bir yönde tekrarlanan sınır koşullu bir arayüz düşünün. Sarkıntıları ve adaları ihmal edersek, dizilimler $1 \le n \le L$ için, h_n yükseklikleri ile işaretlenebilir. Eşyönsüz (K_x, K_y) etkileşimleri olan İsing modeli için, x yönündeki bir arayüzün enerjisinin

$$-\beta\mathcal{H} = -2K_y L - 2K_x \sum_n |h_{n+1} - h_n|$$

olduğunu gösterin.
(b) Sütundan sütuna taşıma matrisini $\langle h \mid T \mid h' \rangle$ yazın, ve köşegenleştirin.
(c) (b)'deki sonucu kullanarak, veya herhangi başka bir yöntemle, arayüz serbest enerjisini hesaplayın
(d) Arayüz serbest enerjisinin yok olması için, K_x ve K_y arasındaki koşulu bulun. Orijinal $2d$ İsing modelindeki kritik sınıra karşılık geliyor mu?

****



8. *Eşyönsüz Landau Teorisi:* d boyutta, n bileşenli mıknatıslanma alanını düşünün.
(a) Eşyönsüzlük üzerine önceki problemleri rehber olarak kullanarak, Landau-Ginzburg Hamiltoniyenini uzamsal eşyönsüzlüğü içerecek şekilde genelleştirin.
(b) Bu tür eşyönsüzlükler "önemli" midir?
(c) La_2CuO_4'te, Cu atomları, düzlemlerdeki kare bir ağ üzerine yerleşmiştir, ve sonra düzlemler biraraya konmuştur. Her Cu atomu bir "spin" taşır, bu spinin klasik olduğunu ve uzayda herhangi bir yönü gösterebileceğini varsayacağız. Düzlemde çok kuvvetli antiferromanyetik etkileşimler vardır. Ayrıca, ard arda gelen düzlemleri hizalamaya çalışan çok zayıf bir etkileşim de vardır. Düşük sıcaklık manyetik fazı kabataslak çizin, ve düzen-düzensizlik geçişinin hangi evrensellik sınıfına ait olduğunu belirtin.

****

9. *Eşyönsüz Doğrusal olmayan σ modeli:* n bileşenli,

$$\beta\mathcal{H} = \int d^d\mathbf{x}\left[\frac{1}{2T}(\nabla\vec{s})^2 + gs_1^2\right]$$

Hamiltoniyenine sahip, $\vec{s}(\mathbf{x}) = (s_1, \cdots, s_n)$, $\sum_\alpha s_\alpha^2 = 1$ olmak üzerek, spinleri düşünün. $g = 0$ için, renormalizasyon gurubu denklemleri, mesafeleri $b = e^\ell$ çarpanı ile, ve spinleri $\zeta = b^{y_s}$, $y_s = -\frac{(n-1)}{4\pi}T$ olmak üzerek, çarpanı ile yeniden ölçekleyerek elde edilebilir, ve aşağıdaki denklemi verirler:

$$\frac{dT}{d\ell} = -\epsilon T + \frac{(n-2)}{2\pi}T^2 + \mathcal{O}(T^3)$$

burada $\epsilon = d - 2$.
(a) Sabit noktayı, ve termal özdeğer y_T'yi bulun.
(b) g için renormalizasyon gurubu denklemini, yukarıdaki sabit nokta civarında yazın, ve

karşılık gelen özdeğeri y_g elde edin.
(c) Faz diyagramını T ve g'nin fonksiyonu olarak, fazları gösterek ve $g \to 0$ iken faz sınırının şekline dikkat ederek, kabataslak çizin.

****

10. *Matris modelleri:* Bazı durumlarda, düzen parametresi bir vektör yerine bir matristir. Mesela, üçgensel (Heisenberg) antiferromanyetlerde, her spin üçlüsü, $120°$ ile hizalanarak, yerel olarak bir düzlem belirlerler. Bu düzlemin sistem boyunca değişimleri 3×3'lük bir dönme matrisi ile gösterilir. Bu problemin genelleştirilmiş halini tasvir etmek için doğrusal olmayan bir σ modelini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{4}\int d^d\mathbf{x}\text{İz}\left[\nabla M(\mathbf{x}) \cdot \nabla M^T(\mathbf{x})\right]$$

Hamiltoniyenini düşünün, burada M, reel, $N \times N$ *ortagonel* bir matristir, ve 'İz' iz alma işlemini gösterir. Ortagonellik koşulu, $MM^T = M^T M = I$, burada I $N \times N$ birim matristir, ve M^T devrik matristir, $M_{ij}^T = M_{ji}$. Bölüşüm fonksiyonu, bütün matris fonksiyonelleri üzerinden toplama yaparak elde edilir:

$$Z = \int \mathcal{D}M(\mathbf{x})\delta\left(M(\mathbf{x})M^T(\mathbf{x}) - I\right)e^{-\beta\mathcal{H}[M(\mathbf{x})]}$$

(a) Hamiltoniyeni ve ortagonellik koşulunu, M_{ij}, $(i, j = 1, \cdots, N)$ matris elemanları cinsinden yeniden yazın. Sistemin temel durumunu tasvir edin.
(b) Simetrik ve anti-simetrik matrisleri

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(M + M^T) = \sigma^T \\ \pi = \frac{1}{2}(M - M^T) = -\pi^T \end{cases}$$

şeklinde tanımlayın. $\beta\mathcal{H}$ ve ortagonellik koşulunu, σ ve π matrisler cinsinden ifade edin.
(c) Düzenli durum $M(\mathbf{x}) = I$ etrafında *küçük salınımları* düşünün. σ'nın π'nin kuvvetleri cinsinden

$$\sigma = I - \frac{1}{2}\pi\pi^T + \cdots$$

şeklinde yazılabileceğini gösterin. Ortagonallık koşulunu kullanarak, σ integralini alın, ve $\beta\mathcal{H}$ için π'de dördüncü dereceden bir ifade elde edin. İki farklı türden dördüncü derece terim olduğuna dikkat edin. Delta fonksiyonunun argumanı tarafından yaratılan terimleri *dahil etmeyin.* Metinde, doğrusal olmayan σ modeli için gösterildiği gibi, bu terimler sonucu en düşük mertebede etkilemez.
(d) N-vektör düzen parametresi için, $N - 1$ Goldstone modu vardır. Ortagonel $N \times N$ düzen parametersinin $N(N-1)/2$ böyle moda yol açtığını gösterin.
(e) $\beta\mathcal{H}$'in ikinci derece kısmını düşünün. İki nokta bağdaşlık fonksiyonun, Fourier uzayında

$$\langle \pi_{ij}(\mathbf{q})\pi_{kl}(\mathbf{q}')\rangle = \frac{(2\pi)^d\delta^d(\mathbf{q}+\mathbf{q}')}{Kq^2}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right]$$

olduğunu gösterin.

Şimdi, q'değeri $\lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$ kabuğundan olan $M^{>}(\mathbf{q})$ modlarını kaldırarak, renormalizasyon gurubunu oluşturacağız.

(f) Bu modları kaldırdıktan sonra, düşük sıcaklıklarda, $\langle \text{İz}(\sigma)\rangle_0^{>}$ kabalaştırılmış beklenen değerini hesaplayın. $\text{İz}(M') = \text{İz}(\sigma') = N$ yapan, $M'(\mathbf{x}') = M^{<}(\mathbf{x})/\zeta$ ölçekleme çarpanını belirleyin

(g) Tedirgeme kuramını kullanarak, kabalaştırılmış çiftlenim sabitini $\tilde{K}$ hesaplayın. Sadece, $\beta\mathcal{H}$'deki $(\nabla\pi_{ij})^2$ terimini doğrudan renormalize eden iki diyagramı hesaplayın ve

$$\tilde{K} = K + \frac{N}{2}\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2}$$

olduğunu gösterin.

(h) (f)'deki sonucu kullanarak, matris yeniden ölçeklemesinden sonra, K' için RG denkleminin

$$K' = b^{d-2}\left[K - \frac{N-2}{2}\int_{\Lambda/b}^{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2}\right]$$

olarak verildiğini gösterin.

(i) $T = 1/K$ için, *differansiyel* RG denklemlerini $b = 1 + \delta\ell$ alarak elde edin. $d < 2$ ve $d = 2$ için akışları kabataslak çizin. $d = 2 + \epsilon$ için, T_c ve kritik üstel ν'yü hesaplayın.

(j) Hamiltoniyene eklenen küçük bir simetri kıran terimi $-h\int d^d\mathbf{x}\,\text{İz}(M)$ düşünün. h'nin renormalizasyonunu bulun ve karşılık gelen y_h üstelini belirleyin.

RG ve simetri ispatlarını birleştirerek, 3×3 matris modelinin, tedirgemeli olarak $N = 4$ vektör modeline bütün mertebelerde eşit olduğu gösterilebilir. Bu, yığınlanmış üçgensel antiferromanyetlerin, $\mathcal{O}(4)$ evrensellik sınıfının bir gerçeklemesini sunduğu anlamına gelebilir; bkz. P. Azaria, B. Delamotte, ve T. Jolicoeur, J. Appl. Phys. **69**, 6170 (1991). Ancak, tedirgeme dışı (topolojik özellikler) S.V. Isakov, T. Senthil, Y. B. Kim, Phys. Rev. B **72**, 174417 (2005)'de tartışıldığı gibi, bu denkliği ortadan kaldırıyor gibi görünüyor.

****

11. *Pürüzleşme geçişi:* $d = 3$'te

$$\beta\mathcal{H}_0 = -\frac{K}{2}\int d^2\mathbf{x}(\nabla h)^2$$

Hamiltoniyeni ile tarif edilen sürekli arayüz modelini düşünün, burada $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ noktasındaki arayüzün yüksekliğidir. Kristalize bir yüz için, h'nin mümkün değerleri, ağ aralığının katlarıdır. Süreklilikte, h'nin tamsayı değerleri için eğilimi, Hamiltoniyen'e

$$-\beta U = y_0\int d^2\mathbf{x}\cos(2\pi h)$$

terimi eklenerek taklit edilebilir. $-\beta U$'yu tedirgeme olarak ele alın, ve aşağıdakileri takip ederek, renormalizasyon gurubunu oluşturun:

(a) $\sum_\alpha q_\alpha = 0$ için

$$\left\langle \exp\left[i \sum_\alpha q_\alpha h(\mathbf{x}_\alpha)\right]\right\rangle_0 = \exp\left[\frac{1}{K}\sum_{\alpha<\beta} q_\alpha q_\beta C(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)\right]$$

olduğunu, aksi takdirde, sıfır olduğunu ispatlayın. ($C(\mathbf{x}) = \ln|\mathbf{x}|/2$, iki boyutta Coulomb etkileşimidir.)
(b)

$$\langle |h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})|^2\rangle = -\left.\frac{d^2}{dk^2} G_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right|_{k=0}$$

olduğunu ispatlayın, burada $G_k(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \langle \exp\left[ik\left(h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})\right)\right]\rangle$ olmak üzere.
(c) (a)'daki sonuçları kullarak, $G_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})$'yi y_0^2 mertebesine kadar hesaplayın. (İpucu: $\cos(2\pi h) = \left(e^{2i\pi h} + e^{-2i\pi h}\right)/2$ olarak alın. İlk terim, (a)'daki sonuca göre yok olurken, ikinci mertebe katkı, yapı olarak, bu bölümde daha önce tasvir edilen Coulomb gazıyla özdeştir.)
(d) Tedirgeme sonucunu, etkin bir etkileşme K cinsinden yazın, ve kritik bir K_c'den büyük K için, tedirgeme kuramının uygulanamaz olduğunu gösterin.
(e) (d) kısmındaki tedirgeme sonucunu, "ağ aralığını" a'dan ae^ℓ'e değiştirerek, K ve y_0 için, renormalizasyon gurup denklemleri haline sokun,
(f) Yineleme bağıntılarını kullanarak, modelin faz diyagramını ve fazlarını tartışın.
(g) Büyük $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ aralıkları için, geçişte, $\langle|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})|^2\rangle$'nin süreksiz sıçramasının genliğini bulun.

****

12. *Pürüzleşme ve eşleklik:* Bir önceki problemdeki Hamiltoniyenin kesikleştirilmiş halini düşünün, öyle ki kare ağın her i konumunda, tam sayı değerli bir yükseklik vardır h_i. Hamiltoniyen

$$\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2}\sum_{<i,j>} |h_i - h_j|^\infty$$

olarak verilir, burada "∞" kuvveti, $\Delta h = 0$ için hiçbir enerji maliyeti olmadığı; $\Delta h = \pm 1$ için $K/2$ kadar enerji maliyeti olduğu, ve $\Delta h = \pm 2$ veya daha fazla olmasının, komşu konumlar için *mümkün olmadığı* anlamına gelir. (Bu, sınırlanmış katı üzerine katı (SKÜK) modeli olarak bilinir)
(a) Eşlek modeli diyagramatik olarak, veya şu adımları takip ederek oluşturunuz:
(i) N konum değişkeninden h_i, $2N$ bağ değişkenine $n_{ij} = h_i - h_j$ geçin. n_{ij}'nin herhangi bir plaka etrafındaki toplamının sıfır olduğunu gösterin.
(ii) n tamsayıları için, $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta n}/2\pi = \delta_{n,0}$ özdeşliğini kullanarak, koşulları zorlayın.
(iii) Koşulları zorladıktan sonra, n_{ij} değerleri üzerinden toplamı serbestçe yaparak, komşu plaklar üzerindeki eşlek değişkenler θ_i arasındaki eşlek etkileşimi $\tilde{v}(\theta_i - \theta_j)$ elde edin.
(b) Büyük K için, eşlek problemin sadece XY modeli olduğunu gösterin. Bu sonuç, bir önceki problemde renormalizasyon gurubu ile elde edilen sonuçla tutarlı mıdır? (Ayrıca, ilmik modeli

ile bağlantıya da dikkat edin.)
(c) Bu Hamiltoniyen'in bir boyutlu uyarlamasının, yani

$$-\beta\mathcal{H} = -\frac{K}{2}\sum_i |h_i - h_{i+1}|^2$$

Hamiltoniyeni ile 2d arayüz, pürüzleşme geçişi var mıdır?

****