Ayar Dönüşümleri

Maxwell denklemlerinden ikisini ele alalım.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Birinci denklem, bize $\vec{B}$ alanının, başka bir vektör alanı ~~$\vec{\nabla}\times\vec{A}$~~ cinsinden

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

şeklinde yazılabileceğini söyler. İkinci denkleme yerleştirirsek

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=-\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

elde ederiz. Bu da bize parantez içindeki ifadenin, bir fonksiyonun gradyanı olarak yazılabileceğini söyler:

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Bu şekilde bütün elektromanyetik alanlar $(\phi,\vec{A})$ alanları cinsinden yazılabilir. $(\phi,\vec{A})$ alanlarını bulabilmek için, ~~Maxwel~~ diğer iki Maxwell denklemini kullanabiliriz.

Ancak öncelikle bu potansiyelleri inceleyelim. Manyetostatikte de belirttiğimiz gibi vektör potansiyele herhangi bir fonksiyonun gradyanını eklemek manyetik alanı değiştirmeyecektir.

$$\cancel{\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla A}$$

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \longrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Ancak Λ fonksiyonu zamana bağlı ise, bu dönüşüm altında elektrik alan değişecektir. Ancak eğer skalar potansiyeli, ϕ, de

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

şeklinde değiştirir isek

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow -\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda)$$

$$= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

Yani, skalar ve vektor potansiyeli

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda \end{aligned}\right\} \text{ Ayar Dönüşümleri}$$

olarak değiştirmek, elektromanyetik alanı değiştirmez. Bu da bize herhangi bir elektrik ve manyetik alana karşılık gelen sonsuz tane skalar ve vektör potansiyel olduğunu söyler.

Elektromanyetik Dalgalar

$\vec{A}$ ve ϕ potansiyellerini

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

denklemlerinden bulabiliriz. İşlemleri kolaylaştırmak için $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ olduğunu varsayalım. Boşluk için $\varepsilon = 1$; $\mu = 1$ olacaktır.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right)$$

Maxwell denkleminde yerine yerleştirir isek

$$\frac{1}{\mu}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = 4\pi\frac{\mu}{c}\vec{J} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2\vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{4\pi\mu}{c}\vec{J}}$$

Skalar potansiyel için, diğer denklemi kullanabiliriz.

$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho$$

$$\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{\partial t} - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}}$$

elde ederiz. Eğer bu denklemlere, serbest yüklerin olmadığı bir bölgede bakarsak $\rho = 0$; $\vec{J} = 0$ olduğundan

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = -\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right).$$

elde ederiz. Bu denklemler oldukça karışık denklemlerdir. özellikle ~~ϕ ve ϕ için ol.~~ iki denklemin de hem ϕ hem de $\vec{A}$ içermesi, bu denklemleri daha da zor hale getirir.

Ancak bu durumdan kurtılmak için ayar dönüşümlerini kullanabiliriz. Ayar dönüşümleri altında vektör potansiyelin diverjansının değişimine bakalım:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\Lambda$$

Yani ayar dönüşümleri altında değişir. Herhangi bir elektromanyetik alana karşılık gelen bir vektor potansiyel için

$$\nabla^2 A = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

olacak şekilde bir ayar ~~for~~ dönüşümü yaparsak, yeni vektor potansiyelin diverjansı sıfır olacaktır: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_{yeni} = 0$. $\vec{A}_{yeni}$'de aynı manyetik alana karşılık geleceğinden, aynı denklemi sağlayacaktır. Bu ayarda, skalar potansiyel

$$\nabla^2\phi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

denklemini sağlar. Bu ise elektrostatikte elde ettiğimiz denklemin aynısıdır. Bu ayara Coulomb ayarı denir. Bu ayarda vektör potansiyelin sağladığı denklem ise bir miktar sadeleşmekle beraber, Poisson denklemine oranla daha karışıktır:

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{\cancel{\mu} c} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

Benzer şekilde,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

ifadesinin de ayar dönüşümleri altında değiştiği gösterilebilir. Bunu kullanarak

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

olduğu bir ayar da seçilebilir. Bu ayarda vektör potansiyel de skalar potansiyel de benzer denklemleri sağlar:

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A_i=\frac{4\pi\mu}{c}J_i$$

(vektör potansiyel için olan denklem "i" bileşeni için yazılmıştır.)

~~Bu denklemleri bir arada~~

Boşlukta ($\rho=0$; $\vec{J}=0$) bu denklemleri

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\varphi=0 \quad \left(\frac{1}{v^2}=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\right)\varphi=\phi,\ A_i \text{ olmak üzere}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu, dalga denklemi olarak bilinen denklemdir.

Tek boyutta yazacak olursak

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x,t)=0$$

halini alır. Bu denklemin en genel çözümü

$$\varphi(x,t)=f_1(kx-wt)+f_2(kx+wt)$$

olarak yazabiliriz. Bu çözümün x'e ve t'ye göre iki türevini alacak olursak:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=k^2\left(f_1''(kx-wt)+f_2''(kx+wt)\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=w^2\left(f_1''(kx-wt)+f_2''(kx+wt)\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Eğer $\quad \frac{k^2}{w^2}=\frac{1}{v^2}\Rightarrow \boxed{k^2-\frac{w^2}{v^2}=0}$

ise φ dalga denkleminin çözümüdür.

f_1, ~~sabit~~ $+x$ yönünde hareket eden bir dalgayı f_2 ise $-x$ yönünde hareket eden bir dalgayı temsil eder. ($k, w > 0$ olduğu kabul edilmişti)

Fourier teoremine göre herhangi bir fonksiyonu

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{2\pi}e^{i\alpha x}\tilde{f}(\alpha)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\varphi(x,t)$ fonksiyonu için

$$\varphi(x,t)=\int\frac{dk\,dw}{(2\pi)^2}e^{i(kx-wt)}\tilde{\varphi}(k,w)$$

şeklinde bir açılım elde edebiliriz.

Maxwell denklemleri doğrusal denklemler olduğu için, herhangi bir dalga yerine $e^{i(kx-wt)}$ dalgalarını inceleyebiliriz. Herhangi bir dalga bunların toplamı olarak yazılabilir. Bu dalgaları üç boyuta $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)}$ olarak genelleştirebiliriz. Burada $\vec{k}$ dalga vektörü w ise dalganın açısal frekansıdır. Bu ifade bir "düzlem dalga"yı betimler (düzlem denmesinin sebebi $\vec{k}\cdot\vec{x}=\text{sabit}$ olan noktaların bir düzlem belirtmesidir). Bir düzlem elektromanyetik dalga için potansiyelleri

$$\phi = \phi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)}$$
$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)}$$

olarak yazabiliriz. ϕ_0 ve $\vec{A}_0$ birbirlerinden bağımsız değillerdir, ayar koşulu ile ilişkilendirilirler.

Lorentz ayar ifadesini

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

kullanırsak

$$i\left(\vec{k}\cdot\vec{A}_0 - \frac{\mu\varepsilon}{c}w\phi_0\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-wt)} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\vec{k}\cdot\vec{A}_0 - \frac{\mu\varepsilon}{c}w\phi_0\right) = 0$$

olmalıdır.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

koşulunu değiştirmeden yapabileceğimiz başka ayar dönüşümleri de vardır;

$$\Lambda = i\alpha\, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

seçersek,

$$\vec{A}_0 \rightarrow \vec{A}_0 - \alpha\vec{k}$$

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 - \alpha\omega$$

olur. Bu yeni ϕ_0 ve $\vec{A}_0$ değerleri de

$$\vec{k}\cdot\vec{A}_0 - \frac{\mu\varepsilon}{c}\phi_0 \longrightarrow \vec{k}\cdot(\vec{A}_0 - \alpha\vec{k}) - \frac{\mu\varepsilon\omega}{c}(\phi_0 - \alpha\omega)$$

$$= \left(\vec{k}\cdot\vec{A}_0 - \frac{\mu\varepsilon\omega}{c}\phi_0\right) - \alpha\left(k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c}\omega^2\right)$$

$$= -\alpha\left(k^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c}\omega^2\right)$$

ki boşlukta $(\mu = \varepsilon = 1)$ $= 0$

ayar koşulunu ~~da~~ sağlar. Dolayısıyla boşluktaki EM dalgalar için $\alpha = \phi_0/\omega$ seçerek $\phi_0 = 0$ da seçebiliriz.

Bu dalgalar için, elektrik ve manyetik alanları yazacak olursak

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i(\vec{k} \times \vec{A}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= -i\left(\vec{k}\,\phi_0 - \frac{1}{c} w \vec{A}_0\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

olarak yazabiliriz.

Ayar koşulunda $\phi_0 = \frac{c}{\mu\varepsilon}\frac{1}{w}\vec{k}\cdot\vec{A}_0$ olduğunu kullanırsak

$$\vec{E} = -i\left(\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}_0)\frac{c}{\mu\varepsilon w} - \frac{1}{c} w \vec{A}_0\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

$$= -\frac{iw}{c}\left(\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}_0)\frac{v^2}{w^2} - \vec{A}_0\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

$$= +i\frac{w}{c}\left[\vec{A}_0 - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}_0)}{k^2}\right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

köşeli parantezdeki ikinci terim, $\vec{A}_0$ ın $\vec{k}$ yönündeki bileşenini çıkarır, dolayısıyla $\vec{A}_0 - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}_0)}{k^2}$ vektörü $\vec{k}$ vektörüne diktir. $\vec{B}$ vektörü de $\vec{k}\times\vec{A}_0$ yönünde olduğu için $\vec{k}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla EM dalgalar, "enine" dalgalardır, yani Elektrik ve manyetik alan hareket yönüne diktir.

Elektrik alan için

$$k^2 \vec{A}_0 - \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{A}_0) = \vec{k}\times(\vec{A}_0\times\vec{k})$$

olduğunu kullanırsak elektrik alanı

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{ck^2}\vec{k}\times(\vec{A}_0\times\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

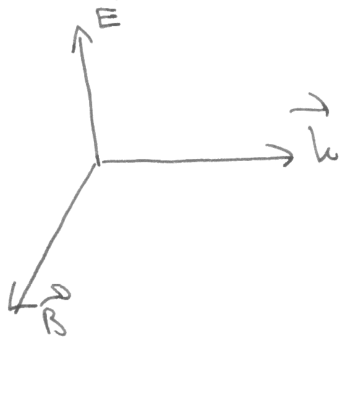
$$= -\frac{\omega}{ck^2}\vec{k}\times\left[i(\vec{k}\times\vec{A}_0)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\omega}{ck^2}\vec{k}\times\vec{B}}$$

elde ederiz. Buradan, $\vec{k}$ ile vektör çarpımından, $\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$ ~~et~~'i de buluruz.

$\vec{k}$ vektörü düzlem dalganın hareket yönünü verir. Elektrik alan bu yöne dik olduğu için yönü hareket yönüne dik bir düzlemde olmalıdır. Birbirine dik ve $\vec{k}$'ya dik iki vektörü $\vec{\varepsilon}_1$ ve $\vec{\varepsilon}_2$ olarak seçersek, genel bir elektrik alanı $\vec{E} = a_1\vec{\varepsilon}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + b_1\vec{\varepsilon}_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

olarak yazabiliriz. Burada $|\vec{\varepsilon}_1|^2 = |\vec{\varepsilon}_2|^2 = 1$; $\vec{\varepsilon}_1^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_2 = 0$
$\vec{\varepsilon}_1^{\,*}\cdot\vec{k} = \vec{\varepsilon}_2^{\,*}\cdot\vec{k} = 0$.



Tanım olarak, elektrik alanının yönü, elektromanyetik dalganın "polarizasyonu"dur. Eğer dalganın hareket yönünü z yönü olarak seçersek $\vec{\varepsilon}_1$ ve $\vec{\varepsilon}_2$ vektörlerini

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0)$$

olarak seçilebilir. Bu, düzlem polarizasyona karşılık gelir, çünkü elektrik alan bir düzlem içinde değişir.

Eğer $\vec{\varepsilon}_+ = (1, i, 0)\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\vec{\varepsilon}_- = (1, -i, 0)\frac{1}{\sqrt{2}}$ olarak seçersek, bunlar dairesel polarizasyon olarak bilinir. $\vec{\varepsilon}_1$ polarizasyonuna sahip bir elektromanyetik dalga için

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\, \vec{\varepsilon}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

$$= \mathrm{Re}\, \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)} + \mathrm{Re}\, \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)}$$

$$= \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt) - \cancel{\sin}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)$$

olur. Bu polarizasyonda, elektrik alanının yönü hareket yönü etrafında döner. $\vec{\varepsilon}_+$ ve $\vec{\varepsilon}_-$ farklı yönlerde dönen elektromanyetik alanlara karşılık gelir.

Yansıma ve Kırınım

Elektromanyetik sabitleri ε_1, μ_1 ve ε_2, μ_2 olan iki malzeme düşünelim. Ara yüzleri bir düzlem olsun. 1 malzemeden, 2. malzemeye doğru dalga vektörü $\vec{k}_1$, frekansı w olan bir dalga yollayalım:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - w_1 t)}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{c}{w_1}(\vec{k}_1 \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - w_1 t)}$$

Bu elektromanyetik dalganın bir kısmı arayüzden yansıyacak, bir kısmı da ikinci bölgeye geçecektir:

$$\vec{E}_y = \vec{E}_{y0} \, e^{i(\vec{k}_y \cdot \vec{r} - w_1 t)}$$

$$\vec{B}_y = \frac{c}{w_1}(\vec{k}_y \times \vec{E}_{y0}) \, e^{i(\vec{k}_y \cdot \vec{r} - w_1 t)}$$

burada "y" indeksi "yansıyan" dalga için kullanılmıştır, ve

$$\vec{E}_g = \vec{E}_{g0} \, e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - wt)}$$

$$\vec{B}_g = \frac{c}{w_2}(\vec{k}_g \times \vec{E}_{g0}) \, e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - wt)}$$

burada "g" indeksi "geçen" dalga için kullanılmıştır.

Daha önce Elektrik ve manyetik alanın bir yüzeyi ~~bi~~ geçerken nasıl değiştiğini incelemiştik.

(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Longrightarrow \vec{B}$'nin yüzeye dik bileşeni süreklidir

(ii) $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{H}$'nin yüzeye yatay bileşeni süreklidir

(iii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho=0 \Rightarrow \vec{D}$'nin yüzeye dik " "

(iv) $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}$'nin " paralel " "

Arayüzü xy düzleminde düşünürsek, bu koşullar aşağıdaki eşitlikleri gerektirir:

(i) $$\frac{c}{\omega_1}\left[(\vec{k}_1\times\vec{E}_0)+(\vec{k}_y\times\vec{E}_{y0})\right]\cdot\hat{z}=\frac{c}{\omega_2}(\vec{k}_g\times\vec{E}_{g0})\cdot\hat{z}$$

(ii) $$\frac{c}{\mu_1\omega_1}\left[(\vec{k}_1\times\vec{E}_0)+(\vec{k}_y\times\vec{E}_{y0})\right]\times\hat{z}=\frac{c}{\mu_2\omega_2}(\vec{k}_g\times\vec{E}_{g0})\times\hat{z}$$

(iii) $$\varepsilon_1(\vec{E}_0+\vec{E}_{y0})\cdot\hat{z}=\varepsilon_2\vec{E}_{g0}\cdot\hat{z}$$

(iv) $$(\vec{E}_0+\vec{E}_{y0})\times\hat{z}=\vec{E}_{g0}\times\hat{z}$$

Bu denklemleri elde etmek için, arayüz üzerinde

$$\vec{k}_1\cdot\vec{r}=\vec{k}_y\cdot\vec{r}=\vec{k}_g\cdot\vec{r}$$

~~olduğu~~ olması gerektiğini kullandık. Aksi takdirde, sınır koşulları belli bir noktada sağlansa da, başka bir noktada sağlanamaz.

Düzlem üzerindeki herhangi bir noktayı

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + 0\hat{z}$$

olarak yazabiliriz. Buradan, bütün x ve y değerleri için

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_y \cdot \vec{r} = \vec{k}_g \cdot \vec{r}$$

olması gerektiğinden, $x=0$ olan özel durumdan

$$(k_1)_y = (k_y)_y = (k_g)_y$$

ve $y=0$ olan noktalardan

$$(k_1)_x = (k_y)_y = (k_g)_y$$

elde ederiz. Bu da bize geçen ve yansıyan dalga vektörlerinin yüzeye yatay bileşenlerinin eşit olduğudur. Bu vektörlerin boyları

$$|\vec{k}_1| = \frac{w}{V_1}, \quad |\vec{k}_y| = \frac{w}{V_1}, \quad \text{ve} \quad |\vec{k}_g| = \frac{w}{V_2}$$

olarak yazılabilir.

~~$\vec{k}_1$ vektörünün yü~~

$\vec{k}_1$, $\vec{k}_y$, $\vec{k}_g$ vektörlerinin yüzeyin dikeyile yaptıkları açılara θ_1, θ_y ve θ_g dersek

$$|\vec{k}_1| \sin\theta_1 = |\vec{k}_g| \sin\theta_g$$

$$\Rightarrow \frac{w}{V_1}\sin\theta_1 = \frac{w}{V_2}\sin\theta_g$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{V_1} = \frac{\sin\theta_g}{V_2}$$

Belli bir ortamdaki ışığın hızı

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$ olarak verilir.

$\sqrt{\varepsilon\mu} \equiv n$ kırılma indeksini tanımlarsak

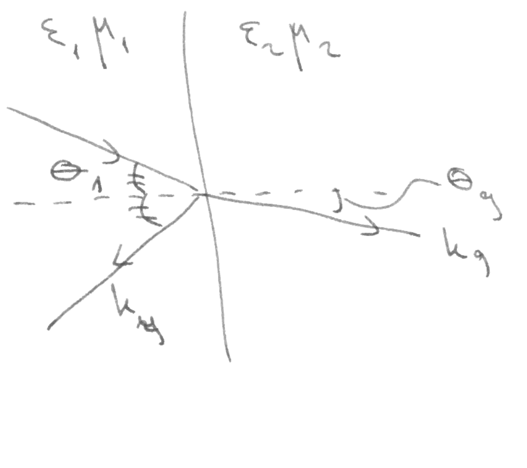
$$v_i = \frac{c}{n_i}$$ olacağından

$$\boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_g}$$ kırınım yasasını elde ederiz.

$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_y|$ olduğundan ve

$(k_1)_x = (k_y)_x$ ve $(k_1)_y = (k_y)_y$ olduğundan

$|(k_1)_z| = |(k_2)_z|$ olmalıdır. Yansıyan ışık, ikinci ortama girmediğinden $(k_1)_z = -(k_2)_z$ olmalıdır. Buradan da $\theta_1 = -\theta_y$ olduğu görülür, yani yansıma açısı, geliş açısı ile aynı, ~~fakat~~ yüzeye dik olan vektörün diğer tarafındadır:



EM dalgaların hareket yönlerini belirledikten sonra şimdi genliklerinin nasıl değiştiğine bakalım. Genlikler için, EM alanın polarizasyonuna göre farklı davranışları olacaktır.

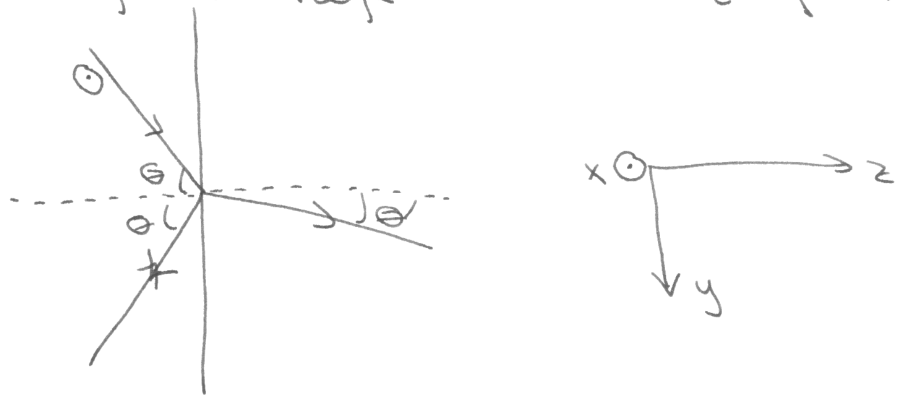
i) Polarizasyon, yüzeye paralel olabilir. Bu polarizasyonu $\vec{\eta}_{\parallel}$ ile gösterelim

ii) Polarizasyon $\vec{\eta}_{\parallel} \times \hat{k}$ yönünde olabilir.

Bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim:

i) Yüzeye Paralel Polarize EM dalganın yansıma ve Kırınımı

$\vec{k}$ vektörlerinin yüzeye paralel yönüne y yönü diyelim. Yüzeye dik de z yönünde olsun



Yukarıdaki şekilde, $\vec{k}$ vektörleri kağıt düzleminde, x yönü kağıdın dışına doğru

Bu gösterimle süreklilik denklemlerini ~~yazacak olursak~~ yazmak için öncelikle ilgili vektörleri bileşenleri cinsinden yazalım:

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{x} \qquad \vec{k}_1 = k_1 \sin\theta\, \hat{y} + k_1 \cos\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{E}_{y0} = E_{y0} \hat{x} \qquad \vec{k}_y = k_1 \sin\theta\, \hat{y} - k_1 \cos\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{E}_{g0} = E_{g0} \hat{x} \qquad \vec{k}_g = k_g \sin\theta'\, \hat{y} + k_g \cos\theta'\, \hat{z}$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{E}_0 = (k_1 \sin\theta\, \hat{y} + k_1 \cos\theta\, \hat{z}) \times (E_0 \hat{x})$$

$$= (-k_1 \sin\theta\, \hat{z} + k_1 \cos\theta\, \hat{x}) E_0$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{E}_0 = +E_0 k_1 (\cos\theta\, \hat{x} - \sin\theta\, \hat{z})$$

$$\vec{k}_y \times \vec{E}_{y0} = -E_{y0} k_1 (\cos\theta\, \hat{x} + \sin\theta\, \hat{z})$$

$$\vec{k}_g \times \vec{E}_{g0} = E_g k_g (\cos\theta'\, \hat{x} - \sin\theta'\, \hat{z})$$

Bu ifadeleri süreklilik denklemlerinde yerleştirir isek

i) $\frac{c}{\omega_1}\left(+E_0 k_1 \sin\theta + E_{y0} k_1 \sin\theta\right) = +\frac{c}{\omega_2} E_{g0} k_g \sin\theta'$

ii) $\frac{c}{\mu_1 \omega_1}\left(k_1 E_0 \cos\theta - k_1 E_{y0} \cos\theta\right) = \frac{c}{\mu_2 \omega_2} E_{g0} k_g \cos\theta'$

iii) $0 = 0$

iv) $E_0 + E_{y0} = E_{g0}$

Dikkat ederseniz, üçüncü koşul (B alanının yüzeye dik bileşeninin sürekli olması) otomatic olarak sağlanır. (i). koşul ve (iv). koşul Snell yasasını verir. Dolayısıyla (i). denklem yerine Snell yasasını da kullanabiliriz. (ii) ve (iv) denklemlerini kullanarak E_{y0} ve E_{g0}'ı bulabiliriz

$$E_{y0} = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}} E_0 \; ; \; E_{y0} = \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}} E_0$$

Pekçok malzeme için $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq 1$'dir.

Bu durumda

$$E_{y0} = \frac{2 \sin\theta' \cos\theta}{\sin(\theta + \theta')} E_0 \; ; \; E_{y0} = \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} E_0$$

olur. Bu denklemler Fresnel denklemleri olarak bilinir. Özel bir durum, $\theta = \theta' = 0$ olduğu durumdur. Bu durumda yukarıdaki ifadeler $\frac{0}{0}$ belirsizliği içerdikleri için dikkatlı olunması gerekir. $\theta, \theta' \ll 1$ için Snell yasasını yazacak olursak

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta' \Rightarrow n_1 \theta \simeq n_2 \theta'$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta'} \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\tan\theta}{\tan\theta'} \simeq \frac{\theta}{\theta'} \simeq \frac{n_2}{n_1}$$

$$E_{y0} \simeq \frac{2}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}} E_0 \simeq \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_0$$

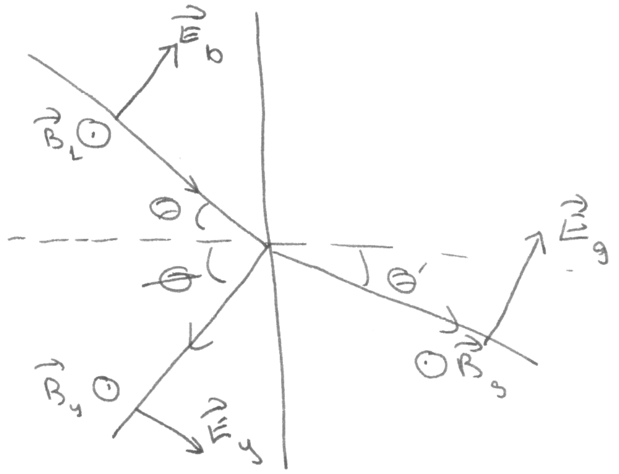
$$E_{y0} \simeq \frac{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}} E_0 \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0$$

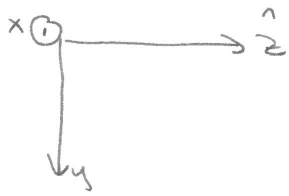
En sağdaki ifadeler $\mu_1 \simeq \mu_2$ durumunda elde edilmiştir.

Dikkat edilecek olursa, $\vec{E}_{go}$, herzaman için yollanan dalganın polarizasyonu ile aynı yöndedir. Oysa yansıyan dalganın polarizasyonu ($\vec{E}_{yo}$'ın yönü), daha yoğun bir ortama girerken ($n_2 > n_1$) yollanan dalganın polarizasyonu ile zıt yöndedir.

ii) $\vec{B}$ alanı yüzeye paralel ise:

Bu durumda değişkenlerimizi ve koordinat eksenlerimizi aşağıdaki gibi tanımlayalım:





$$\vec{E}_b = -E_{10} \cos\theta\, \hat{y} + E_{10} \sin\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{E}_y = +E_{yo} \cos\theta\, \hat{y} + E_{yo} \sin\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{E}_g = -E_{go} \cos\theta'\, \hat{y} + E_{go} \sin\theta'\, \hat{z}$$

$$\vec{k}_1 \times \vec{E}_o = k_1 E_o \hat{x}$$
$$\vec{k}_y \times \vec{E}_y = k_y E_{yo} \hat{x}$$
$$\vec{k}_g \times \vec{E}_g = k_g E_{go} \hat{x}$$

160. sayfadaki denklemlere yerleştirir isek

i) $0 = 0$

(ii) $$\frac{c}{\mu_1 \omega_1} k_1 (E_o + E_{yo}) = \frac{c}{\mu_2 \omega_2} k_g E_{go}$$

(iii) $$\varepsilon_1 (E_{10} + E_{yo}) \sin\theta = \varepsilon_2 E_{go} \sin\theta'$$

(iv) $$(-E_o + E_{yo}) \cos\theta = -E_{go} \cos\theta'$$

Yine (ii) denklemi (iii). denkleme bölersek

$$\frac{c}{\mu_1 \varepsilon_1} \frac{k_1}{\omega_1} = \frac{c}{\mu_2 \varepsilon_2} \frac{k_g}{\omega_2}$$

elde ederiz, ki $\frac{c}{\mu \varepsilon} = v$; $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}$ olduğunu kullanırsak $1 = 1$ verir, yani bu iki denklem Birbirine denktir.

(iii) denklemi (iv). denkleme bölersek

$$\frac{\varepsilon_1 (E_o + E_{yo})}{-(E_o - E_{yo})} \tan\theta = -\varepsilon_2 \tan\theta'$$

ve Buradan da

$$E_{yo} = -\frac{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\tan\theta'}{\tan\theta}}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\tan\theta'}{\tan\theta}} E_o = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1 \tan\theta}{\varepsilon_2 \tan\theta'}}{1 + \frac{\varepsilon_1 \tan\theta}{\varepsilon_2 \tan\theta'}} E_o$$

elde ederiz.

(iii) Denkleme yerleştirir isek

$$E_{90} = \frac{2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{n'}{n}}{1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}} E_0$$

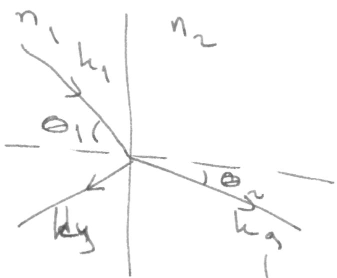
Buluruz.

Kırınma ve yansıma yasalarını bulduktan sonra, kırınma ve yansımayla ilgili ilginç birkaç olayı inceleyebiliriz.

Tam Yansıma

Snell yasasına dönecek olursak

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

olarak yazabiliriz. Eğer $n_1 > n_2$ ise (yani daha yoğun olan bir ortamdan, daha az yoğun bir ortama geçişte)

$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$'e karşılık gelen açı için

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

olacaktır. Yani geçen ışık tam arayüzde hareket edecektir. Eğer θ_1 açısı daha büyük değerler alacak olur ise

$\sin\theta_2 > 1$ olacağında θ_2 için herhangi bir reel çözüm bulunamayacaktır.

$$(k_g)_z = k_g \cos\theta_2 = k_g\sqrt{1-\sin^2\theta_2}$$

olduğundan ve $\sin\theta_2 > 1$ olduğu için $(k_g)_z$ tamamen karmaşık bir sayı olacaktır.

$$(k_g)_z = i\,\mathcal{K}_g$$

olarak tanımlarsak, ve geçen dalganın $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ ile orantılı olduğunu kullanırsak, geçen dalga, malzemenin içine doğru üstel olarak azalacaktır, ve sadece arayüzün yakınında bir bölgede sıfırdan farklı olacaktır.

Bu durumda yansıyan dalganın Elektik alanının genliği

$$E_{y0} = \frac{1 - A\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}}{1 + A\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}} E_0$$

olarak yazılabilir (A'nın değeri $\vec{E}$ alanının mı yoksa $\vec{B}$ alanının mı yüzeye paralel olduğuna göre değişir) ~~sinθ' reel~~ ~~cosθ~~ $\sin\theta'$ reel bir sayı $\cos\theta'$ ise ~~reel~~ tamamen karmaşık bir sayı olduğu için $1 - A\frac{\tan\theta}{\tan\theta'} = \left(1 + A\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}\right)^*$ olduğundan $|E_{y0}| = |E_0|$ olacaktır. Yani bu durumda yansıyan dalganın şiddeti, gelen dalga ile aynı olacak, sadece fazı farklı olacaktır.

Ortalama olarak gelen dalganın taşıdığı enerjinin tamamı yansıyan dalga tarafından alınacaktır (işten tam yansıma). Bu durumda geçen dalganın ortalama hiç enerji taşımaması gerekir. Poynting vektörü açıkça yazılıp ortalamasına bakılarak bu açıkça gösterilebilir.

Brewster Açısı

Gelen ~~taşıyan~~ dalganın $\vec{B}$ alanı arayüze paralel ise daha önce yansıyan dalganın elektrik alanının genliğinin

$$E_{y0} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}} E_0$$

olduğunu göstermiştik (sayfa 165). Eğer

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\tan\theta}{\tan\theta'} = 1$$

olacak şekilde bir θ açısı ile gönderilirse, yansıyan dalga olmayacaktır. Bu açıya θ_B Brewster açısı denir.

Eğer yine $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq 1$ alırsak,

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \approx \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$n_2 \approx \sqrt{\varepsilon_2}$$

olacağından, Snell yasasından

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_B = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta'$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta} \quad \text{olacaktır.}$$

Yukarıdaki ifadeye yerleştirir isek

$$\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}\,\frac{\tan\theta}{\tan\theta'} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\theta'\cos\theta'}{\sin\theta\cos\theta} = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\theta'$$

~~Bu~~ $\theta = \theta'$ olamayacağından,

$2\theta = \pi - 2\theta' \Rightarrow \theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$ olması

gerekir. Dolayısıyla $\sin\theta = \cos\theta'$; $\cos\theta = \sin\theta'$

olur.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \tan\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

olarak bulunur. Genel olarak yüzeye gelen EM dalgalar pek çok farklı polarizasyonu içerecektir. Ancak θ_B ile gelen EM dalgalar, yansıdıklarında sadece tek bir polarizasyona sahip olacaklardır. Pek çok malzeme için, $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$ olacaktır. Bu durumda $\tan\theta_B \simeq 1 \Rightarrow \theta_B \simeq 45^0$ olarak bulunur.