14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Ders Notları 2

Konrad Menzel

5 Şubat 2009

1. Olayların Olasılığı

Şimdiye kadar, olayların sadece tanımlarına ve özeliklerine baktık – bazı olayların gerçekleşme olasılığı çok düşükken (örneğin Schwarzenegger'in 44ncü başkan olarak seçilmesi gibi) bazılarının gerçekleşmesi nispeten kesindir- ancak olayların *olasılıkları*, yani olayların örneklem uzayının kalanına göre gerçekleşme ihtimali, hakkında hiçbir şey söylemedik.

Biçimsel olarak, P olasılığı *S*[1]'deki $\mathcal{A} = \{A1, A2, \ldots\}$ olaylar yığınından reel sayılara giden bir fonksiyon olarak tanımlanır.

$$P : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & P(A) \end{cases}$$

Kullanışlı bir olasılık tanımı yapabilmek için, her hangi bir olasılık fonksiyonu P'nin aşağıdaki aksiyomları sağlamasını bekleriz:

(P1) Herhangi bir $A \in \mathcal{A}$ için $P(A) \geq 0$

(P2) P(S) = 1, - yani "*kesinlikle bir şey olacak*"

(P3) *Ayrık* $A_1, A_2, \ldots$, kümelerinin herhangi bir dizisi için

$$P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

Matematiksel bir not olarak, bu aksiyomların (ve sonraki derste P(A)'nın özelliklerinin türetimlerinin) bir anlam ifade edebilmesi için $\mathcal{A}$ yığını S'yi ve onun elemanlarının tümleyenleri ile birleşimlerini içermek zorundadır. Bu, bir önceki sayfada dipnotta

---

[1] Olasılığın tutarlı bir tanımı için, olaylar grubu aşağıdaki özelikler sahip olmak zorundadır
(S1) $S \in \mathcal{A}$
(S2) Eğer $A \in \mathcal{A}$ ise, o zaman onun tümleyeni $A^C \in \mathcal{A}$
(S3) Herhangi sayılabilir $A_1, A_2, \ldots$ olayların birleşimi $\mathcal{A}$'dir, yani $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$
Bu olaylar yığınına S'nin *sigma-cebiri* olarak adlandırılır. Bu dersin amacı için, bu önemli değildir, ve eldeki sorunun bu tür aksiyomlara uygunu olduğu gerçeğini veri olarak kabul edeceğiz.

açıkladığımız sigma-cebirdir. Bu ders için, bu özellikleri daha fazla üzerinde tartışmadan verilmiş kabul edeceğiz.

Tanım 1. *Bir örneklem uzayı S üzerinden tanımlanan bir olasılık dağılımı (P1) –(P3) aksiyomlarını sağlayan P(A) ile gösterilen bir sayılar yığınıdır.*

P(1)-P(3) aksiyomlarının olaylara bir tek olasılık atamadığına dikkat ediniz. Onun yerine, bu aksiyomlar sadece olasılığın ne olması gerektiği konusunda sezgilerle tutarlı bir şekilde herhangi bir olasılık dağılımının sağlaması gereken *minimum* koşulları verirler(gerçekte bunu aşağıda kontrol edeceğiz). Prensipte, bu özelikleri sağlayan herhangi bir P(.) fonksiyonu geçerli bir olasılık oluşturur, fakat bunun eldeki rasgele deneyin iyi bir açıklaması olup olmadığını anlamak için özelikleri ayrı ayrı görmek zorundayız. Bu her zaman zor bir sorudur. Bu dersin 5. bölümünde (Özel Dağılımlar), belli standart durumlar için bazı popüler P(.) seçimlerini tartışacağız.

2.Olasılığın Bazı Özelikleri

Şimdi, P(1)-P(3) aksiyomlarının gerçekten de olasılık fonksiyonumuzun sezgisel olarak beklediğimiz özeliklere sahip olmasını sağladığından emin olmak için yeterli olduğu konusunda kendimizi ikna etmemiz gerekiyor. Sezgisel olarak fonksiyonun şu özeliklere sahip olmasını bekleriz: (1) Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığının toplamı bir olmalı, (2) imkânsız olayın, ∅, gerçekleşme olasılığı sıfır olmalı, (3) Eğer A olayı B olayını içeriyorsa, B olayının olasılığı P(A)'dan büyük olamamalı, ve (4) herhangi bir olayın olasılığı [0,1] aralığında yer almalı. Şimdi, temel aksiyomları kullanarak bu özelikleri ispatlayalım.

Önerme 1.

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

ISPAT: Tümleyen A^C tanımına göre,

$$1 \overset{(P2)}{=} P(S) \overset{\text{Tanım "}A^C\text{"}}{=} P(A \cup A^C) \overset{(P3)}{=} P(A) + P(A^C)$$

burada son adımda $A \cap A^C = \emptyset$ kullanılmaktadır, yani A ve onun tümleyeni ayrıktır. Bunu yeniden düzenlediğimizde,

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

elde ederiz. Zaten göstermeye çalıştığımız da budur.

Önerme 2

$$P(\emptyset) = 0$$

ISPAT: $\emptyset^C = S$ olduğu için, önceki önermeyi kullanarak

$$P(\emptyset) = P(S^C) \overset{\text{Önerme 1}}{=} 1 - P(S) \overset{(P2)}{=} 1 - 1 = 0$$

olduğunu gösterebiliriz.

Önerme 3. Eğer B ⊂ A ise, *o zaman* P(B) ≤P(A)'dır.

Dipnot olarak, bu kural sezgisel görünmesine rağmen, bilişsel psikologlar insanların günlük olasılık muhakemesi içinde bu kuralı sık sık bozduklarını keşfettiler[2].

İSPAT: Olasılık aksiyomlarını kullanabilmek için, A olayını birleşim ve kesişim özelliklerini kullanarak bölüntülere ayırmak yararlı olacaktır.

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C) = B \cup (A \cap B^C)$$

Burada, son adımda B ⊂ A ise $(A \cap B) = B$ kullanılmıştır. (P3) aksiyomunu kullanabilmek için B ile $(A \cap B^C)$ nin ayrık olduğuna dikkat etmek gerekir.

$$B \cap (A \cap B^C) = B \cap (B^C \cap A) = (B \cap B^C) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$$

Dolayısıyla, aksiyom P(1)'i kullanarak

$$P(A) = P(B) + P(A \cap B^C) \geq P(B)$$

sonucuna ulaşırız.

Önerme 4: *Herhangi, bir A olayı için* 0 ≤ P(A) ≤ 1.

İSPAT: *0 ≤ P(A)* aksiyom (P1)'dir. İkinci eşitlik için, (P1) aynı zamanda $P(A^C) \geq 0$'i sağlar.

Dolaysıyla önerme 1'e göre

[2] Örneğin, Daniel Kahneman ve Amos Tversky tarafından yapılan bir çalışmada birkaç kişi Linda'nın tarifini aşağıdaki gibi veriyorlardı:

Linda 31 yaşındadır, bekardır, gevezedir, ve çok zekidir. Felsefe eğitimi aldı. Öğrenci iken, ayırımcılık ve sosyal adalet konularıyla çok derinden ilgilenirdi ve aynı zamanda nükleer karşıtı gösterilere de katılırdı.

Linda'nın bir gişe memuru olma olasılığı sorulan kişiler, onun *feminist* bir gişe memuru olma olasılığı sorulan kişilere göre daha düşük değerler verme eğilimindeydiler.

$$P(A) = 1 - P(A^C) \leq 1$$

Önerme 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

İSPAT: Önerme 3'te olduğu gibi Olay A ve B'yi bölümlere ayırabiliriz.

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

Aynı şekilde,

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$$

Bunların bölüntü olduğu kolayca kontrol edilebilir. Yani kümelerin her bir çifti ayrıktır. Dolayısıyla aksiyom (P3) kullanılarak görüleceği gibi

$$P(A) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap B^C)\big) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

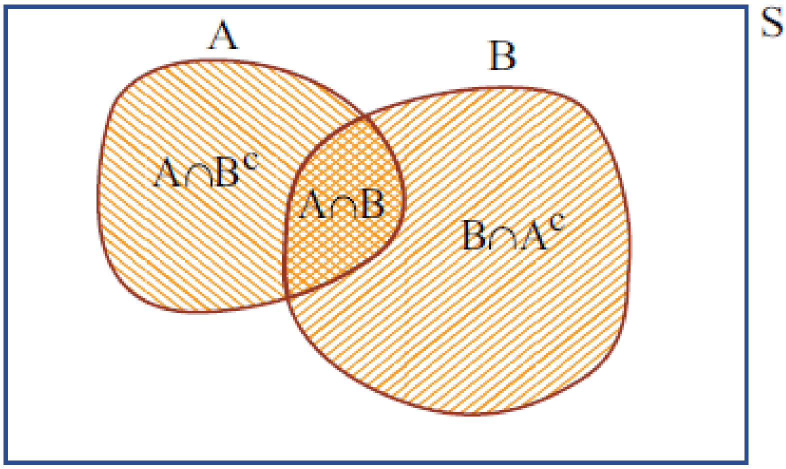
ve

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

Dolaysıyla, $(A \cap B)$, $(A \cap B^C)$ ile $(B \cap A^C)$ $A \cup B$'nin bölüntüsü olduğu için (P3) kullanılarak (şekil 1 söz konusu fikrin grafiksel gösterimini vermektedir)

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + [P(A \cap B^C) + P(B \cap A) + P(B \cap A^C)] = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

Son denklemin yeniden düzenlenmesi istenen sonucu verir.



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 1. $A \cup B$'nin ayrık olaylara bölüntülenmesi

3 Örnek: "Basit" Olasılık

Sonuçların olay gerçekleşmeden önce simetrik olduğu, yani bir olayın olma olasılığının diğerinden fazla olması için bir sebebin olmadığı sonlu bir örneklem uzayımızın olduğunu varsayalım. Eğer n(C) bir C olayındaki sonuçların sayısını ifade ederse, olasılık

$$P(A) := \frac{n(A)}{n(S)}$$

olarak tanımlanır. Yani, olasılık, A olayında yer alan S'deki bütün olası sonuçların oranına eşittir. Bu dağılım, "basit" olasılık dağlımı veya "mantıksal" dağılım olarak adlandırılır. Para veya zar gibi her bir sonucun olasılığı eşit olan araçlar için adil oldukları söylenir. Şimdi üç aksiyomun da sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

(P1): P(A) ≥ 0 n(.)'nin sadece (zayıf ihtimalle de olsa) pozitif değerler almasının doğrudan sonucudur

(P2): P(S) = $\frac{n(S)}{n(S)}$= 1

(P3) Ayrık iki A ve B olayı için

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) + n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$$

İkiden fazla küme için, argümanlar esas itibariyle özdeştir.

Örnek 1. *Kusursuz bir zarın bir kere atıldığını varsayalım. Bu durumda örneklem uzayı S = {1,2,…,6}'a eşittir, dolaysıyla n(S) = 6. Gelen sayının kesinlikle 4'ten büyük olma olasılığı nedir?*

Olay A = {5, 6} *olduğu için,* n(A) = n({5,6}) = 2. *Buradan P(A) =* $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Eğer bir zar iki kere atılırsa, iki rakamın toplamının 4 veya daha düşük olma olasılığı nedir?

Bu durumda: S = {(1, 1),(1, 2), …, (2, 1),(2, 2), …, (6, 6)} *olduğu için* n(S) = 6^2 = 36.

Olay B = "Rakamların toplamı ≤ 4" = {(1, 1),(1, 2),(1, 3),(2, 1), (2, 2),(3, 1)}

Dolaysıyla P(B) = $\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Biraz sonra, belli olaylar sonucunda oluşan sonuçları saymak için daha sofistike teknikleri göreceğiz.

4 Sayma Kuralları

Şimdiye kadar baktığımız örnekler, sırasıyla, A ve S 'deki sonuçları saymanın kolay olduğu nispeten basit örneklerdi. Eğer S birçok elemana sahipse ve A yeterince karmaşık olursa, o zaman n(A) ve n(S)'yi elde etmek için bütün sonuçlar listesine bakmak hem sıkıcı olur hem de pratik olmaz. Bu derste, kombinasyonların ve permütasyonların farklı olaylar sonucunda ortaya çıkan sayılabilir objeler (sonuçlar) için basit kurallar veren "*kombinatorik*" lere bakıyoruz.

Örnek 2. *Ünlü satranç oyuncusu Bobby Fischer (3 hafta önce öldü) sonunda "klasik" satrancı oynamaktan sıkılır ve sadece 8+8 piyonun alışılageldiği gibi yerleştirildiği ancak, ilk sırada, diğer taşların (1 şah, 1 vezir, 2 fil, 2 at ve 2 kale) her bir beyazın aynı cins siyaha karşılık geleceği şekilde rasgele yerleştirildiği bir varyant önerir. Diğer kısıtlamalar ise (1) bir fil siyah karede iken diğeri beyaz karede olmak zorunda, (2) şah ilk seferde iki kale arasından hareket etmek zorundadır (rok yapmaya izin vermek için).*

Bunun arkasındaki düşünce, satranç oyuncularının sadece standart başlama pozisyonu ile iyi işleyen standart oyun açmayı kullanma eğilimde oldukları için, yeni varyant, oyunun ezberlenmeyi imkânsızlaştıracak kadar yeterli sayıda oluşturulması *durumunda, oyuncuları yaratıcı bir şekilde oynamaya zorlamaktır. Fakat kaç tane farklı muhtemel başlama pozisyonu vardır?*

Biz aslında bu gün derste bu sınıfta tanıtılan bazı sayma tekniklerini kullanarak bu hesaplamaları yapacağız. Eğer sıkıldıysanız, soruna saldırmanın (tercihen zarif şekilde) bir yolunu bulmaya başlayabilirsiniz. .

Şimdilik, doğrudan rasgele deneyler veya olasılıklar hakkında konuşmayacağız fakat konu dışına çıkarak daha sonra derste kullanacağımız sonuçları hesaplama ve sayma yöntemlerini ele alacağız.

4.1 Oluşturulmuş Deneyler

Kural 1 ***(Çarpım Kuralı):*** *Eğer bir deney birincisi m olası sonuca ve ikincisi birincisinin sonucu ne olursa olsun n olası sonuca sahip 2 bölümden oluşuyorsa, o zaman deney mxn sonuca sahiptir.*

Örnek 3. *Eğer bir şifrenin 8 karakterli (harf ve rakam) olması gerekiyorsa, o zaman söz konusu deney her birisi 2x26 + 10 = 62 sonucu olan 8 parçaya sahiptir (şifrenin büyük ve küçük harfe duyarlı olduğu varsayımına göre). O halde, toplam olarak* 62^8 *(kabaca 218 trilyon) kadar farklı şifre elde ederiz. Açıkça söylemek gerekirse, onların tümünü el ile saymaya çalışmak iyi bir fikir olmazdı.*

Örnek 4. *Bilgisayar sistemlerinin çoğunda kullanılan standart ASCII karakter seti 127 karakter içerir (boşluk hariç). Hafıza için her karaktere 1 byte = 8 bit isnat edilir. Geçmişten gelen sebeplerden ötürü, aktarma veya koddaki kopyalama hatalarını tespit etmek için 8nci bit tutarlılık kontrolünde "parite" olarak kullanılırdı. Bundan ötürü, her birisi {0,1}'den oluşan sonuca sahip 7 parçalı bir deneyimiz ve bu nedenle de toplam* 2^7 *= 128 sayıda farklı karakterimiz var.*

Örnek 5. *Bir kart destesinde 52 kart vardır, dolayısıyla eğer mavi ve kırmızı destelerden birer kart çekersek 52x52=2704 olası kart kombinasyonu elde ederiz (eğer çekilişten sonra hangi desteden hangi kartın geldiğini bilemezsek, o zaman daha az sayıda ayırt edilebilir sonuçlar elde ederiz). Diğer taraftan, eğer aynı desteden geri koymadan iki kart çekersek, hangi kartı önce çektiğimizden bağımsız olarak, ikinci kartı çekmek için destede sadece 51 kart kalmış olur. Elbette hangi 51 kartın kaldığı hangi ilk kartın çekildiğine bağlı olacaktır, ancak bunun çarpım kuralı için önemli olmadığına dikkat edilmelidir. Bu nedenle, eğer aynı desteden iki kart çekersek, 52*51 = 2652 olası kombinasyonumuz olacaktır.*

Son örnek genel şekilde açıklamaya çalıştığımız iki tür deneyi göstermektedir: her biri farklı sayma kurallarına sahip *geri koymalı örneklem* ile *geri koymasız örneklem*.

- *N* büyüklüğündeki bir gruptan *geri koyma* ile *n* tanesi çekilmiştir.

$$\underbrace{N.N\ldots.N}_{\text{n tane}} = N^n$$

mümkün sonuç.

- *N* büyüklüğündeki bir gruptan *geri koymadan n* tanesi çekilmiştir (N ≥ n)

$$P_{N,n} := N(N-1)(N-2)\ldots(N-(n-1)) = \frac{N(N-1)(N-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(N-n)(N-(n+1))\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

mümkün sonuç

k! := 1.2…(k-1)k (k faktöryel olarak okunur) ve 0! = 1 olarak tanımlanır.

Gerçekte, bu iki sayma kuralı çarpım kuralından elde edilir, fakat bunlar istatistikte çok önemli oldukları için onları ayrı değerlendirdik.

4.2 Permütasyonlar

Örnek 6. *Karıştırılmış bir deste, sıralanmış bir destenin permütasyonudur: Her ne kadar sıralama çoğu durumda farklı olsa da, her bir kart tam olarak bir kere destede yer almaktadır.*

Tanım 2. *Objelerin sıralı herhangi bir yeniden düzenlenmesi* permütasyon *olarak adlandırılır.*

Permütasyon oluşturmanın, yerine koymadan, N üyeli bir gruptan N tane çekiliş yapma olduğunu not ediniz.

Örnek 7. *12 ton tekniği modern klasik müzikte bir besteleme tertibidir. Bu tertip içinde her parça bir tona dayanır. Her yarım tonlu ölçeğin (kromatik gam) on iki notası (C, C keskin, D, D keskin, vs….B'ye kadar) tam olarak bir kere görülür. Bu nedenle, her bir tonun dizisi yarım tonlu ölçeğin bir permütasyonudur ve prensipte farklı olan her olası "melodiyi" sayabiliriz (yaklaşık olarak 479 milyon).*

Örnek 8. *Meşhur gezgin satıcı problemi. Diyelim ki ihtiyari olarak sıralanmış, aradaki mesafesi belli 15 kasabadan geçmek zorunda olan bir satıcıyı ele alıp ve her kasabadan (en azından) bir kere geçen en kısa yolu bulacağımızı varsayalım. 15'lik* *gruptan 15 tane çekme formülümüzü kullanarak 15! sonucuna varabiliriz. Bu 1.3 trilyon farklı yol demektir. Bu karmaşık bir problemdir, bu nedenle çözmeyeceğiz.*

Satıcının her bir kasabada 5 müşteriyi ziyaret ettiğini hayal edebiliriz. Eğer müşteriden müşteriye mümkün olan bütün yolları düşünecek olursak, (15x5)! permütasyon elde ederiz (bu çok fazla!). Ancak, araştırmamızı satıcının kasabada iken 5 müşteriyle aynı anda (tanımlanabilir bir sıra ile) görüşme şeklindeki yolculuk planı ile sınırlandırmak mantıklı gibi görünüyor. Her kasabadaki müşteriyi görebilmesi için 5! olası sıralama vardır ve ziyaret edebileceği kasabalar içinse 15! olası sıralama vardır. Dolaysıyla, çarpım kuralını kullanarak söz konusu ilave sınırlamayı sağlayacak permütasyon sayısının hesaplayabiliriz:

$$\underbrace{5!5!\ldots.5!}_{15\ \text{tane}}\ 15! = (5!)^{15}15!$$

Bu hala çarpıcı bir şekilde yüksek bir rakamdır, fakat sınırlandırılmamış (15.5)! permütasyonundan kesinlikle çok daha düşüktür[3].

4.3 Kombinasyonlar

Örnek 9. *Eğer bir tek desteden kaç farklı poker eli çekeceğimizi saymak istersek, yani bir tek desteden yerine koymadan 5 kart çekmek gibi, kartların çekilme sırasıyla değil ancak her hangi bir kartın çekilip çekilmediğiyle ilgileniriz.*

Tanım 3. *Herhangi* sıralanmamış *öğeler toplamına* kombinasyon *denilir*.

Bir kombinasyon bir gruptan yerine koymadan gerçekleştirilen çekilişlerle oluşturulur. Fakat şimdi öğelerin çekiliş sırasıyla ilgilenmediğimiz için, sadece sıralaması farklı ama aynı öğelerden oluşan çekilişleri iki kere saymak istemiyoruz. *n* elemanlı bir yığından çekiliş yapabileceğimiz *n*! kadar farklı sıralama vardır (yani *n* tane elemanın permütasyon sayısı). Dolayısıyla, *N* objeden *n* tane farklı obje kombinasyonu:

---

[3] k! k'ye göre çok hızlı büyüdüğü için çok az kişi faktöriyelin ölçeği hakkında sezgiye sahiptir. "Büyük" k değerleri için oldukça iyi iş gören Strling'sin tahmin

$$k! \approx \sqrt{2k\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Popüler bilimde oldukça yüksek rakamları karşılaştırmak için yaygın olarak kullanılan bir hesaplama gözlemlenen kâinatın toplam atom sayısını tahmin etmektir.Bu değer aşağı yukarı 10^{80} (doğrusu, bu rakamı algılamak da bile güçlü çekiyorum). Faktöriyle cinsinde $10^{18} \approx 59!$'dur. 75! sayısı kabaca 2.5 x 10^{30} (iki buçuk milyon trilyon trilyon) çarpı kainattaki atom sayısı olarak ifade edilebilir.
Bu şekilde karmaşık hesaplamalardan kaçınmak isteyeceğimiz için, sadece faktöriyellerin oranları ile ilgileniriz, bu nedenle de önce hangi terimin birbirini götüreceğini görmek gerekir. Örneğin $\frac{98!}{94!} = \frac{98.97.96.95.94!}{94!}$.

$$C_{N,n} = \frac{Yerine\ koymadan\ N'den\ n\ kadar\ çekiliş\ sonuçlarının\ sayısı}{n\ öğenin\ çekiliş\ \ sırası\ sayısı} = \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

Bu aynı zamanda *binom katsayısı* olarak bilinir ve genellikle

$$\binom{N}{n} := \frac{N!}{(N-n)!n!}.$$

olarak ifade edilir.

Not: Her ne kadar faktöriyellerin oranlarına bakıyorsak da, binom katsayısı daima tamsayıdır (kombinasyon sayısının anlamlı olabilmesi için gereklidir).

Örnek 10. *Poker için, bu formülü kullanarak* $\binom{52}{5}$ = 2598960 *olası el olduğunu hesaplayabiliriz.*

Örnek 11. *İşlevsel bir çalışma grubu, diyelim ki, 5 kişiden fazla olmamalı (bu sayı için pedagojik bir gerekçe yoktur, sadece matematiksel işlemlerim gereğinden fazla karmaşıklaşmasını önlemek istiyorum). Bu derse şu anda 28 öğrenci kaydını yaptırmıştır. Kaç tane uygun çalışma grubu mümkündür (kendi başına çalışan öğrenciler dâhil)? Her bir 1, 2, 3, 4, 5 grup büyüklükleri için çalışma gruplarının sayısını hesaplamak ve toplamını almak zorundayız. Bu durumda (eğer herhangi bir hata yapmadıysam)*

$$S = \binom{28}{1} + \binom{28}{2} + \binom{28}{3} + \binom{28}{4} + \binom{28}{5} = 28 + 378 + 3,276 + 20,475 + 98,280 = 122,437$$

kadar mümkün çalışma grubu vardır.

Şimdi dersin başındaki “zor problem”imize geri dönelim:

Örnek 12: *Fischer’in Rassal Satrancına Geri Dönüş: İlk olarak kale ve filler hakkındaki (1) ve (2) nci sınırlamaları görmezlikten gelelim, yani satranç tahtasının alt sırasında taşların herhangi bir şekildeki yerleşimine izin verelim. 8 beyaz taşı (siyahta olabilir, bu önemli değil) tahtanın alt sırasındaki 8 kareye dağıtmak zorundayız. Dikkat ederseniz bu bir permütasyondur, bu nedenle 8! kadar olası sıralamamız var. Ancak, “sağdaki” ve “soldaki” taşların eşit olası kuralından ötürü kale, vezir ve filler çifterdir. Dolayısıyla, sırasıyla iki kale/fil/veziri birbiriyle değiştirerek* 2x2x2 *olası bir başlangıç pozisyonu oluşturma yolu vardır. Bundan ötürü, farklı oyun sayısı*

$$\text{Oyun Sayısı} = \frac{8!}{8} = 7! = 5040$$

kadardır.

Daha önce söylediğimiz gibi, gerçek kurallar Fischer'in Rasgele Satrancına ilaveten şunları empoze eder: (1) bir fil siyah karede ise diğeri beyaz karededir, (2) şah iki kale arasında ilk hareketini yapabilir. Bu varyant için, eğer sıraları doldurma sıralaması konusunda biraz zekiysek, çarpım kuralını kullanabiliriz. Öncelikle iki fili, tesadüfen seçilen bir siyah kare ile tesadüfen seçilen bir beyaz kareye yerleştirmeyi öneriyorum. Böylece 4x4 olanağımız vardır. Sonra, at geri kalan 6 kareden birine yerleştirilir (6 olanak). İki veziri, geriye kalan 5 kareden herhangi birine yerleştiririz. Bu bir kombinasyondur, yani $\binom{5}{2} = \frac{120}{6.2} = 10$ *tane vezir yerleştirme yolu vardır. Şah ve kaleler için bir sınırlama olduğundan, geriye kalan üç taşı boş olan üç alana yerleştirmek için her zaman bir tek yol vardır. Toplam olarak, elimizde*

Oyun Sayısı = 4x4x6x10x1 = 960

kadar oynanacak potansiyel "oyun" vardır.

Taşları yerleştirme konusunda kritik nokta, çarpım kuralını uygulayabileceğimizden emin olmaktır, yani ilk taşı yerleştirme şeklimiz geriye kalan taşların yerleştirilme olanaklarının sayısını etkilememelidir. Görebildiğim kadarıyla, bu sadece filler için önemlidir: düşünün, önce kale ile şahı ve sonra filleri yerleştirmişiz. O zaman (a) her üç taş aynı renk alanlara (o durumda filleri 1x4 = 4 sayıda olası farklı renkli yerlere koymuş olacaktık) veya (b) taşlardan birisinin diğer iki taştan farklı renkli bir alana (bu bize fil için 2x3 = 6 farklı seçenekle baş başa bırakacaktı) konulup konulmadığını ayırt etmek zorunda kalacaktık. Önce filleri, sonra şahı kalelerden önce yerleştirdiğimiz sürece, daha sonra nasıl devam ettiğimiz önemsiz gibi görünüyor.

5. Başkanın Ölüm Tarihi Paradoksu (Çalışma Sorusu)

Yaşayan veya ölü başkanlar ile ilgili komplo teorileri tipik olarak "sıra dışı" tesadüfler üzerine kurulur. Örneğin, suikaste uğrayan iki Amerikan başkanı için, yani Lincoln ve Kennedy, bir kişi az çok dikkate değer ortak noktalarla alakalı çok uzun bir liste oluşturabilir. Örneğin, Lincoln'un vurulduğu tiyatroya gitmemesi konusunda uyaran Kennedy adında bir sekreteri varken, Kennedy'nin de suikastten önce Dallas'a gitmemesi konusunda uyaran Evelyn Lincoln adında bir sekreteri varmış (Hoş! En azından Wikipedia öyle diyor).

Bir diğer belirgin tesadüf ise 39 başkandan ölmüş olan bazılarının aynı ölüm tarihine sahip olmalarıdır: Filmore ve Taft'ın ikisi de, 8 Mart'ta, ölmüşlerdir. John Adams ve Thomas Jefferson'un ikisi de 4 Temmuz 1826 tarihinde, bağımsızlık bildirgesinin imzalanmasından tam olarak 50 yıl sonra, öldüler. Ve James Monroe tam olarak 5 yıl sonra, 4 Temmuz 1831' de öldü. Bunlar şaşırılması gereken şeyler mi?

İlgili olaya ait sonuçların oranlarının olasılıklara eşit olduğu varsayımı altında, şimdi *iki* belirlenmiş başkanın *belli* bir günde, Şubat 6 diyelim, ölmesinin basit olasılığına bakalım. Bu durumda, iki başkanın ölüm günlerinin 6 Şubat'a denk gelmesinin sadece bir tek kombinasyonu olduğunu buluruz. Fakat saymanın çarpım kuralına göre toplam olarak 365^2 kadar olası ölüm günü kombinasyonu vardır. Buna göre, söz konusu olayın olasılığı son derece düşük bir rakam olan $1/365^2$'dir.

Ancak, duble ölümün potansiyel adayı olarak bir yılda çok sayıda başkan ve gün eşleşmesi vardır. Şimdi, 39 başkandan en az 2'sinin aynı günde ölmesi olayı olan A'nın olasılığı, prensip olarak bir çift, iki çift, üç çifti vb başkanın aynı ölüm tarihine sahip olmasının bütün olası kombinasyonların oranı olarak hesaplanır. Bu sorunu çözmenin en zarif şekli ise $A \cup A^C = S$ ve $A \cap A^C = \emptyset$ olduğu için aksiyom (P2) ve P(3)'ten $P(A) = P(S) - P(A^C = 1 - P(A^C)$ elde ederiz. Olay A^C "39 başkanın tümü farklı ölüm gününe sahiptir" olarak formüle edilebilir. Eğer sadece iki ölü başkan varsa, ilkinin ölümünden sonra ikinci başkanın farklı bir günde ölmesi için 364 farklı yol vardır. Şimdi her bir n başkana *farklı* bir ölüm günü tayin etme olanaklarının sayısını belirlemenin *yerine koymadan* 365'ten n tane çekilişe tekabül ettiğini farketmemiz gerekir, bu nedenle olanakların sayısı $\frac{365!}{(365-n)!}$ 'dir.

Başkanlara mümkün olan tüm farklı ölüm günlerini atama sayısı *yerine koyarak çekiliş yöntemine* tekabül eder, dolaysıyla bu sayı 365^n'dir.

Buna göre aynı ölüm tarihli en az bir çift başkanın olma olasılığı

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{365!}{365^n (365-n)!}$$

burada, *n* = 39 için aşağı yukarı %87.82'e eşittir. Bu formülü kullanarak, farklı sayıdaki başkan için de bu olasılıkları hesaplayabiliriz:

n	P(A)
1	0
2	0.27%
5	2.71%
10	11.69%
20	41.14%
30	70.63%
60	99.41%
366	100.00%

Son satırdan görülebilen, olasılığın bire yükselmesinin sezgisel olarak nedeni ölüm günlerinden daha fazla başkan ölümlerinin gerçekleşmesinden ötürü, potansiyel farklı ölüm gününün “kalmamasıdır”.

Bu nedenle, bu paradoksu çözmek için, iki belirlenmiş başkanın aynı günde ölmesi aslında büyük bir tesadüf iken (çünkü bu olay çok düşük bir olasılığa sahiptir), artan başkan sayısıyla beraber, böyle bir olay için farklı kombinasyon sayısı çok hızlı artar. Başka bir ifadeyle, her bir bireysel sonucun gerçekleşme olasılığı çok düşükken, “potansiyel tesadüf sayısı” çok hızlı bir yükseliş gösterir, bundan ötürü büyük bir olasılıkla en azında bazı tesadüfler gerçekleşmek zorundadır.

Diğer komplo teorilerinin arkasındaki hikaye muhtemelen aynıdır: İnsanlar son derece fazla detayı tarayarak Kennedy ile Lincoln arasında nispeten daha az sayıdaki ilginç paralellikleri bulmaya çalışıyorlar. İstatistikte, bu tür araştırıma stratejisine “data mining” adı verilir ve bu bağlamda gerçekte “yanlış buluş” olarak meydana gelen bu ender tesadüflere değiniriz. Bu tesadüfler sistematik bir ilişkinin sonucunda değil, fakat aynı anda araştırabileceğimiz veya test edebileceğimiz çok sayıdaki potansiyel ilişkinin sonucunda ortaya çıkmaktadır.