14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Ders Notları 9

Konrad Menzel

10 Mart 2009

1. Rasgele değişkenlerin Fonksiyonları

Dersin bu bölümünde rasgele değişkenlerin fonksiyonlarına bakacağız, *Y = u(X).* Y'nin yine bir rasgele değişken olduğunu not ediniz: X örneklem uzayı S'den reel sayılara bir eşleme (mapping) olduğu için

$$X : S \to \mathbb{R}$$

ve u : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olduğundan , u ve X'in bileşimi de aynı zamanda S'den reel sayılara bir eşlemedir:

$$Y = u \circ X : S \to \mathbb{R}$$

Örnek 1. *Eğer X çim biçme makinasındaki birinci bujinin ve Y ikincinin ömrü ise, o zaman ikisinin ömrünün toplamıyla ilgilenmiş olabiliriz, Z = X + Y.*

Örnek 2. MIT'ye gelmeden önce, birkaç Alman araştırma bursuna başvurdum, böylece alacağım bursa bağlı olarak aylık X Euro kadar ücret alacaktım. Döviz kuru, diyelim ki, Eylül 2005'te Y dolar/Euro olsun. Başvurduğum dönemde her iki miktarda belirsizdi, fakat parayı ABD'de harcayacaktım, dolayısıyla alacağım Z = X*Y miktarı esas ilgilendiğim miktardı (en azından dolar değişiminden sonra şikâyet etmeyeceğim kadar).

Şimdi dönüştürülmüş rasgele değişken *u(X)* için yoğunluk ve c.d.f'yi nasıl elde edeceğimizi bilmek istiyoruz, böylece p.d.f. si bilinen bir rasgele değişkenin sadece kendisini içeren bir soruda olduğu gibi, bir rasgele değişkenin fonksiyonunu da içeren her bir problemi ele alabilelim.

Üç durumu düşüneceğiz

1. İlgili değişken kesiklidir
2. İlgili değişken süreklidir
3. X süreklidir ve u(X) kesin artandır

Son durum elbette ikincinin özel durumudur, fakat göreceğimiz gibi çalışılması en kolay olanıdır.

1.1 Kesikli Durum – " 2-Adım" Yöntemi

Eğer X p.d.f.'si $f_X(x)$ olan bir kesikli rasgele değişken ise ve u(.) deterministtik bir fonksiyon iken Y = u(X) ise,

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(u(X) = y) = \sum_{x:u(x)=y} f_X(x)$$

Örnek 3.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{eğer} \quad x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

O zaman eğer Y = g(X) = |X| ise,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(0) = \frac{1}{5} & \text{eğer} \quad y = 0 \text{ ise} \\ f_X(-1) + f_X(1) = \frac{2}{5} & \text{eğer} \quad y = 1 \text{ ise} \\ f_X(-2) + f_X(2) = \frac{2}{5} & \text{eğer} \quad y = 2 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Eğer X kesikli ise Y'nin de kesikli olduğunu not ediniz.

1.2. Sürekli Durum – " 2-Adım" Yöntemi

Eğer X p.d.f.'si $f_X(x)$ olan bir sürekli rasgele değişken, ve Y = u(X) ise, o zaman Y'nin c.d.f.'si aşağıdaki ifade ile verilir:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(u(X) \leq y) = \int_{x:u(x)\leq y} f_X(x)dx$$

Eğer Y de aynı zamanda sürekli ise, o zaman

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Eğer X sürekli ise, Y'nin sürekli olmasının gerekmediğin not ediniz.

Örnek 4. *X'ten küçük en büyük tamsayı Y = [X], X'in sürekli veya kesikli olup olmamasına bağlı olmadan, kesiklidir.*

Örnek 5.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{eğer } -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Şimdi şuna bakalım,

$$Y = X^2$$

X ∈ [-1, 1]'den Y = [0, 1] olur. Y'nin yoğunluğunu nasıl elde ederiz? y ∈ [0, 1] için, c.d.f aşağıdaki gibidir.

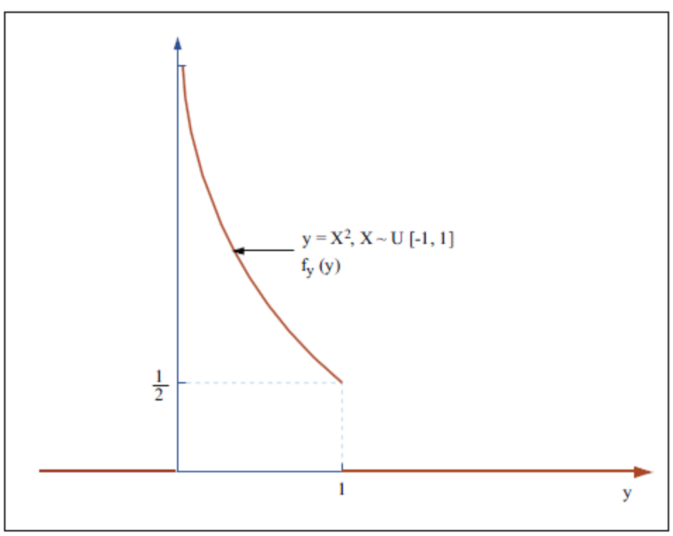
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{y}$$

Toparlarsak,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } y < 0 & \text{ise} \\ \sqrt{y} & \text{eğer } y \in [0,1) & \text{ise} \\ 1 & \text{eğer } y \geq 1 & \text{ise} \end{cases}$$

Y sürekli olduğu için, yoğunluğu şöyle hesaplarız,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{eğer } y \in [0,1] \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$



1.3. Bire-Bir Dönüşüm için Değişken Değiştirme Formülü

Genel olarak Y'nin yoğunluğunu, özelikle bir integral ve bir türev içerdiği için, c.d.f'ler aracılığıyla X'in $f_X(x)$ yoğunluğundan elde etmek uygun değildir. Bu durumda, p.d.f.ler arasında daha direkt bir bağlantı olup olmadığı merak edilebilir.

Daha genel duruma geçmeden önce, varsayalım ki bazı sabit değerler a > 0 için u(x) = ax'tir. O zaman Y = u(X) = aX'in c.d.f si aşağıdaki ile elde edilir.

$$F_Y(y) = \int_{ax \le y} f_X(x)dx = \int_{x \le \frac{y}{a}} f_X(x)dx = F_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

Zincir kuralını kullanarak, Y'nin p.d.f.'sini şöyle türetebiliriz:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{1}{a}f_X(x)$$

Bunun için en iyi sezgisel değerlendirme nedir? – Eğer a > 1 ise, dönüşümü, rasgele değişkenin üzerine düştüğü ekseni germe olarak düşünebiliriz. Bu durum, eksen üzerindeki herhangi bir iki noktaya a'nın çarpımı kadar yer değiştirtir, fakat değişkenin iki nokta arasına düşme olasılığını sabit tutar. Dolayısıyla, X'in dağılımı ile karşılaştırıldığında Y'nin dağılımı 1/a çarpımı kadar "seyrekleşmiş" olur. Bunu içinde bir miktar üzüm olan hamur ile hayal edebiliriz. Hamuru ne kadara yayarsak, hamur içindeki üzümlerin hamur tahtasının yüzeyine göre dağılımı o kadar seyrek olacaktır.

X'in u(.)'sunun türevlenebilir monoton dönüşümü için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 1. *X $f_X(x)$ yoğunluğu bilinen rasgele sürekli bir değişken olsun, ayrıca P(a ≤ X ≤ b) = 1 ve Y = u(X)'dir. Eğer u(.) |a,b| gibi bir aralıkta kesin artan ve türevlenebilir ise ters yer değişim s(y) = u^{-1}(y)'ye sahipse, o zaman T'nin yoğunluğu aşağıdaki ifade ile verilir.*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(s(y))\left|\frac{d}{dy}s(y)\right| & \text{eğer} \quad u(a) \le y \le u(b) \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Benzer sonucun, u(x)'in |a, b|'de kesin azalan olma durumunda da doğru olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 6. *X [0, 1] aralığında uniform, böylece p.d.f.si de aşağıdaki gibi olsun*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer} \quad 0 \le x \le 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Y = X^2'nin p.d.f.'si nedir? X'i desteklemek için, u(x) = x^2'nin kesin artan ve türevlenebilir olduğunu düşünüyoruz ve böylece Y'nin p.d.f.sini elde etmek için u(.)'nun tersi olan s(y) = $\sqrt{y}$ 'yi kullanarak aşağıdaki ilişkiyi elde ederiz.

$$f_Y(y) = f_X(s(y)) \left| \frac{d}{dy} s(y) \right| = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{eğer} \quad 0 \le \sqrt{y} \le 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Bu, yukarıda yaptığımız bir örneğe benzemektedir. Öncekinden farklı olarak, X'in desteği [-1, 1] idi ve böylece u(x) = x^2 X'i desteklemek için monoton değildi.

Bu formüllün sadece bire-bir türevlenebilir dönüşümler- yani monoton - için çalıştığını not etmek çok önemlidir. Diğer durumlarda, kesikli ve sürekli durumlar için hantal 2-adımlı yöntemlere bağlı kalmak zorundayız.

1.4 Olasılık İntegrali / Quantile Dönüşüm

Sürekli rasgele değişkenler için, ilginç- aynı zamanda çok yararlı- bir sonuç vardır: aşağıdaki manada "c.d.f'nin c.d.f.'si" uniform bir değişkendir:

Önerme 2. *X, c.d.f.si $F_x(X)$ olan sürekli bir rasgele değişken olsun. O zaman, c.d.f. X'in rasgele çekilişiyle ölçülürken, $F_x(X)$ uniform dağılımlıdır. Yani*

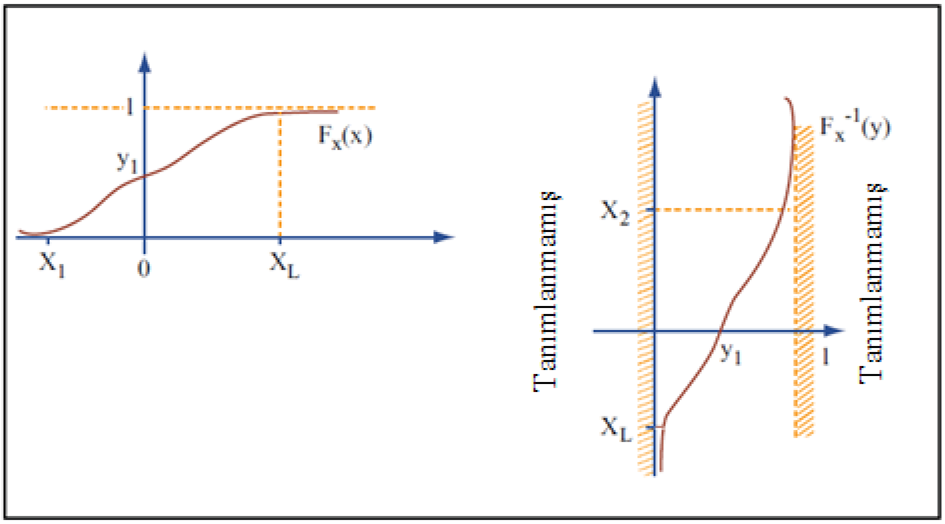
$$F_X(X) \sim U[0,1]$$

Rasgele bir değişkenin fonksiyonun kendisinin de rasgele bir değişken olduğuna dikkat ediniz (bunu daha sonra detaylı bir şekilde tartışacağız).

İSPAT: C.d.f. sadece sıfır ile 1 arasında değerler aldığı için, F(X)'in c.d.f.'si olan G(.)'nin hali hazırda şu koşuları sağladığını görebiliyoruz:

$$\begin{aligned} G(F(X)) = P(F(X) \le x) &= 0 \text{ eğer } x < 0 \text{ ise} \\ G(F(X)) = P(F(X) \le x) &= 1 \text{ eğer } x > 1 \text{ ise} \end{aligned}$$

Genelleştirmeyi ortadan kaldırmadan (sadece birkaç ilginç olmayan ekstra tanım veya durum farklılığından kaçınarak), varsayalım ki F(.) *kesin* monotondur- unutmayın ki *bütün* c.d.f.ler azalmayandır. Bunun anlamı, F^{-1}(.) gibi ters bir fonksiyonun olduğudur, yani , $F^{-1}(F(x)) = x$ gibi bir fonksiyondur.



Ters fonksiyonda kesin olarak monoton olacaktır, böylece $0 \leq x \leq 1$ için rasgele değişken $F_X(X)$'in c.d.f.'si aşağıdaki gibidir

$$P\left(F_X(X) \leq x\right) = P\left(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(x)\right) = P\left(X \leq F_X^{-1}(x)\right) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$$

(birinci eşitlik F^{-1}'în monotonluğunu, ve c.d.f'nin üçüncü tanımını kullanır).

Özetlersek, rasgele değişken F(X)'in c.d.f.si olan G(.) şöyledir

$$G(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ x & \text{eğer} \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer} \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Bunun, [0, 1] aralığında uniform rasgele bir değişkenin c.d.f.'si olduğunu da kolaylıkla kontrol edebiliriz, böylece F(X) U[0, 1] ile aynı olasılık dağılımına sahiptir.

Bu sonuç ne işe yarar? Bir örnek olması bakımından, bilgisayar ile uniform rasgele rakamlar elde etmenin çok etkin yolları vardır. C.d.f.si $F_X(.)$ olan bir rasgele değişkenden n çekilişli bir örneklem elde etmek istiyorsanız, şunları yapabilirsiniz:

- $U_1, \ldots U_n \sim U[0, 1]$ çekilişini yapınız,
- her bir uniform çekilişini şuna göre dönüştürünüz:

$$X_i = F_X^{-1}(U_i)$$

Daha önceki argümanımıza göre, $X_1, ..X_n$ c.d.f. si $F_X(.)$ olan bir rasgele değişken gibi davranır. Bu yöntem *integral (ya da quantile) dönüştürme* olarak bilinir.

Örnek 7. *Uniform dağılımından bir rasgele değişken U'yu çekmemize izin veren bir bilgisayar programımızın olduğunu varsayalım, fakat biz gerçekte rasgele çekilen ve p.d.f.'si aşağıdaki gibi olan bir X elde etmek istiyoruz*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

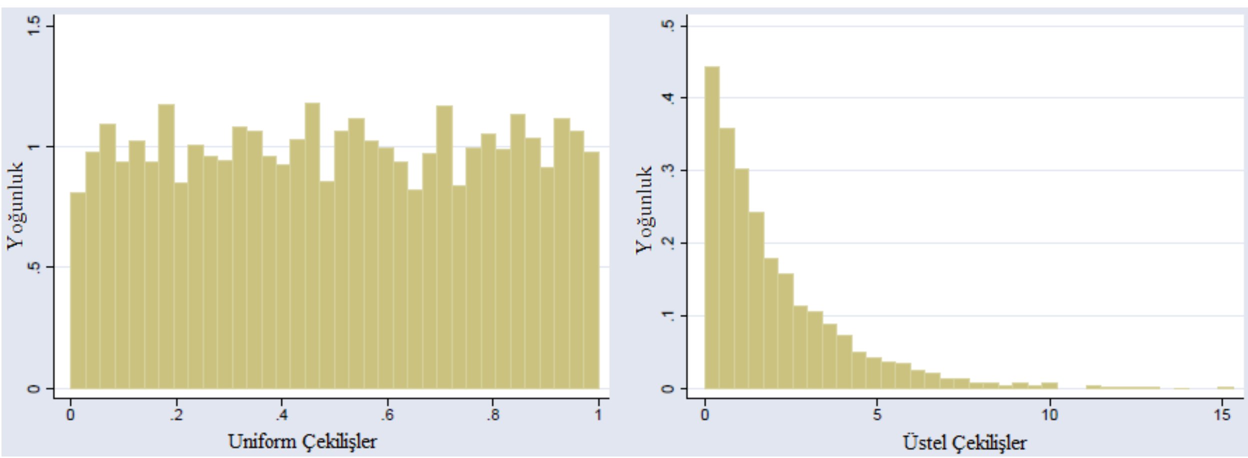
Integral ile X'in c.d.f.sini elde edebiliriz:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Böylece c.d.f.'nin tersi şöyledir:

$$F_X^{-1}(u) = -2\log(1-u) \quad u \in [0,1] \text{ için}$$

Eğer bunu bir istatistik yazılım veya Excel kullanarak denersek, çekilişin histogramı şöyle görünecektir:



Şekil 1. Bir uniform'dan (Soldaki) 5000'lik çekilişin histogramı ve X_i = -2log(1-U_i)'in dönüşümü (Sağdaki)

Eğer Excel'de kendi başınıza birkaç örnek denemek istiyorsanız, RAND() fonksiyonunu kullanarak birkaç uniform rasgele çekiliş yaratabilirsiniz. Sonra, menülere tıklayarak histogram oluşturabilirsiniz("Araçlar"> "Veri Analizi" > "Analiz araçları" > "Histogram")