Problem Seti 8
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 28 Nisan 2009

Soru Bir: Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi

Bu dersten öğreneceğiniz iki önemli kavram büyük ihtimalle Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi ile bu iki kavramın etrafımızdaki dünyayı anlamamız için ortalamalar kullanmamıza nasıl olanak verdikleridir.

1. Büyük Sayılar Kanunu'nu belirtiniz (lütfen sadece ders notlarından kopyalayınız).
2. Büyük Sayılar Kanunu'nun ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir X rasgele değişkenin i.i.d. örnekleminin ortalaması hakkında bize ne söylediğini açıklayınız.

Varsayalım ki Nisan 2009 boyunca Cambridge'de yaşayanların işsizlik oranını bilmek istiyorsun. İşsiz "16 yaşında ve daha büyük referans haftasında çalışmayan, geçici hastalıklar dışında çalışmaya müsait, ve referans haftasıyla biten son dört haftada iş bulmak için çaba göstermiş kişidir. İşten kovulan ancak kovulduğu yerden geri çağırılmayı beklediği için iş aramak gereğini duymayan kişiler de işsiz olarak sınıflandırılır." (kaynak: http://www.econmodel.com/classic/terms/ur.htm).

Varsayalım ki telefon görüşmesiyle rasgele değişken X = 1 (çalışan) için bir örneklem oluşturdunuz, burada 1(.) bir kişinin çalıştığını ifade eder.

1. İşsizlerin toplam işgücüne bölümü olan işsizlik oranının, α, bir tahmin edicisini, $\hat{\propto}$, yazınız. Bir Bernoulli rasgele değişkeni için tahmin ediciniz bir Momentler Yöntemi tahmin edicisi mi?
2. Tahmin edicinizin tutarlı olabilmesi için X ile ilgili yerine gelmesi gerekli koşulları (en az üç) ifade eden tahmin ediciye Büyük Sayılar Kanunun nasıl uygulanacağını açıklayınız(yukarıda ders notlarından kopyaladığınız Büyük Sayılar Kanunu'nu ile).
3. Yazdığınız her bir koşul için, işsizlik oranı için ortaya koyduğunuz varsayımların geçerliliği için yorum yapınız.

Şimdi Merkezi Limit Teoremine daha yakından bakacağız.

1. Merkezi Limit Teoremini belirtiniz (lütfen sadece ders notlarından kopyalayınız).
2. Merkezi Limit Teoreminin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir X rasgele değişkenin i.i.d. (bağımsız, benzer dağılımlı) örnekleminin ortalaması hakkında bize ne söylediğini açıklayınız.
3. Tahmin edicinizin asimptotik olarak normal dağılımlı olması için işsizlik oranı için yazdığınız tahmin edici ile ilgili yerine gelmesi gerekli koşulları (en az üç) ifade eden tahmin ediciye Merkezi Limit Teoreminin nasıl uygulanacağını açıklayınız. Bu koşullar Büyük Sayılar Kanunu'nun uygulanması için gerekli olanlardan farklı mıdır?
4. N $\rightarrow \infty$ iken tahmin edicinizin yakınsadığı dağılımı yazınız. Burada N anket çalışması uyguladığınız kişi sayısıdır.
5. X'in varyansı için bir tahmin edici yazınız. Tahmin edicinin tutarlı olabilmesi için rasgele değişken $Y = X^2$ için gerekli olan varsayımlar hakkında yorum yapınız.
6. Şimdi, X'in bir Bernoulli rasgele değişkeni olduğu gerçeğini kullanarak, X'in varyansının farklı bir tahmin edicisini momentler yöntemi tahmin edicisi olarak yazabilirsiniz (yani işsizlik oranınızın tutarlı bir tahmin edicisinin fonksiyonu gibi). Formüller farklı görünmesine rağmen, bu iki tahmin edici sayısal olarak aynı mıdır? Büyük Sayılar Kanununu uygulamak için yapılan varsayımların aynısını tutmaya gerek var mı?
7. Ortalama işsizlik oranınızın tahmin edicisi ile X'in varyansını kullanarak: Eğer tahmin edicinizin %95 olasılıkla μ'nun 0.002 (yani % 0.2 işsizlik oranı) kadar etrafında olmasını arzuluyorsanız, kaç kişiyi aramanız gerekir? (İşsizlik Şubattan Marta 8.1'den 8.5'e yükseldiği için, Nisan için beklentinizin 8.7'ye bir artış şeklinde olduğunu varsayın).

Soru İki: Sapmasızlığa karşı Tutarlılık

Birincisi, sapmasızlık ve tutarlılık arasındaki fark nedir? İkincisi, örneklem ortalaması $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$'nin i.i.d. rasgele değişkenleri,X_1, …X_n' in N büyüklüğündeki örnekleminin sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu ispat ediniz, burada $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Üçüncüsü, ilave bir varsayım altında örneklem ortalamasının μ'nun tutarlı bir tahmin edicisi olduğunu gösteriniz ve yapmaya ihtiyaç duyduğunuz varsayımı belirtiniz.

Soru Üç: Kavram Kargaşalığından Kaçınmak

Anlam belirsizliklerinden ve benzer kavramların kullanımından kaçınmak için:

1. "İstatistik" kavramını tanımlayınız. İstatistik bir rasgele değişken midir?
2. "Tahmin edici" kavramını tanımlayınız. Bir tahmin edici rasgele değişken midir? Bir tahmin edici ile bir istatistik arasındaki fark nedir? Ya da bu soru anlamlı mı?
3. Bir tahmin edicinin "gerçekleşmesi" kavramını tanımlayınız.
4. "Tahmin" kavramını tanımlayınız.

5. Bir rasgele değişken X'in "standart sapma"sını tanımlayınız.
6. Bir tahmin edici $\hat{\theta}$(X)'in "standart hata"sını tanımlayınız.

Soru Dört: Delta Yöntemi

Standart hata tahmin edicisi $\hat{\theta}_Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^2$ için standardize edilmiş basıklığı $\mathbb{E}[Z^4] = \delta^4$ olan bir standart rasgele değişken belirleyiniz. N'nin "büyük" olduğunu varsayalım. (İpucu: $\hat{\theta}_Z$'in asimptotik dağılımı nedir?)

Şimdi de, $\mathbb{E}$[X]) = μ, Var(X) = σ^2 ve standart basıklığı $\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \delta^4$ olan bir rasgele değişken X için standart hata tahmin edicisi $\hat{\theta}_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$ elde etmek için değişken değiştirmeyi uygulayınız.

Normal dağılımlı rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin dağılımlarını elde etmenin daha genel versiyonuna Delta Yöntemi adı verilir: Wikipedia: Delta Yöntemi. Ancak, bu tek değişkenli basit dönüşüm için, sadece rasgele değişkenlerin dönüşümü için halı hazırda öğrendiğiniz yöntemleri kullanabilirsiniz.

Soru 5: Maksimum Olabilirlik Tahmin Edicisi

Maksimum olabilirlik tahmin edicileri ekonomide çok yaygın olarak kullanılırlar.

1. İ.i.d. Poisson rasgele değişkenleri,X_1, …X_n' in N büyüklüğündeki bir örnekleminin olabilirlik fonksiyonunu belirtiniz.
2. Log-Olabilirlik fonksiyonunu belirtiniz ve basitleştiriniz.
3. Birinci sıra koşulunu alınız ve λ'nın maksimum tahmin edicisi için çözünüz.
4. (3)'teki Maksimum Olabilirlik tahmin edici (MLE) dersteki Momentler Yöntemi (MoM) tahmin edicisiyle nasıl karşılaştırılır.