14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 1 - Çözümler
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 17 Şubat 2009

Açıklamalar

Problemleri çözmek için beraber çalışabilirsiniz fakat yazılı cevapları herkes ayrı ayrı getirmek zorundadır, bu nedenle yaptıklarınızın tümünü gösterdiğinizden emin olunuz. Her ne kadar yanlış sorular için kısmı puan verilse de, her bir sorunun her bir bölümü 1 puandır?

Soru 1

MIT ekonomi bölümünün tenur olmamış hocalar arasından bölümü kurum genelinde temsil edecek 3 kişilik bir delegasyon seçilecektir.

a) Kaç değişik şekilde delegasyon seçilebilir?
   - (a)'nın Çözümü: 10 tenur olmayan hoca olduğu için, "10 seç 3" $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{3.2.1}$ = 120 farklı yoldan üç hoca seçilebilir. Dahası, eğer üç hoca belli bir pozisyon için seçilirse, yani başkan, başkan yardımcısı, delegasyon sekreteri gibi, o zaman toplam olarak $\frac{10!}{7!}$ = 10.9.8 = 720 kadar yol olacaktır, çünkü hocaların her bir 120 farklı kombinasyonu 3 pozisyona 6 farklı yoldan karışacaktır.

b) Eğer iki kişi beraber gitmeyi ret ederse, kaç değişik şekilde delegasyon seçilebilir?
   - (b)'nin Çözümü: (a) bölümünden 10 tenur olmayan hoca arasından 120 farklı şekilde seçim yapıldığını bildiğimizden, bu soruna en azından iki yönden yaklaşabiliriz. Ya iki sinir bozucu hocanın yer aldığı kombinasyonları çıkarabiliriz, ya da gitmeyi kabul etmeyen o iki hocadan en fazla bir tanesinin bulunduğu kombinasyonları doğrudan sayabiliriz.

     Birinci yol kolaydır. [120 - "İkisi beraber gitmeyi kabul etti" sayısı] formülüyle hesaplarız. İkisini çıkarabilmek için, ikisini önce seçmemiz gerekir(bu problemin kısıtlayıcısıdır- çok karmaşık hesaplamalardan kaçınmak için bunu başında veya sonunda yapmak zorundayız). Kombinasyon mantığına göre ikisini seçmenin sadece bir tek yolu vardır(onları seçmek için permütasyonda kesin olarak sadece 2 yol vardır: ya birini önce seçersiniz ya da ötekini): Bu bize diğer kurul üyelerini seçmek için 8 farklı yol bırakır. Böylece aradığımız [120 – 8] = 112 cevabına ulaştık.

Diğer yönteminde aynı sonucu vereceğini göstermek için, sinir bozucu hocalar ile ilgilenmeden, önce grubu seçmenin yollarını sayalım: $\binom{8}{3}$ = $\frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1}$ = 56. Söz konusu iki hocayı seçmenin iki yolu olduğunu hatırlayınız. Şimdi de iki sinir bozucu hocayı seçmenin yollarını sayalım: : $\binom{8}{2}$ = $\frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7}{2.1}$ = 28. Böylece hesaplamanın son aşamasına ulaştık: (en fazla bir sinir bozucu hoca) kombinasyon sayısı = (0 sinir bozucu hoca) kombinasyon sayısı + 2. (1 sinir bozucu hoca) kombinasyon sayısı = 56 + 2.28 = 112.

Beklediğimiz gibi iki yaklaşımda aynı sonucu verdi.

c) Eğer iki belirli kişi ya beraber gitme ya da hiç gitmeme konusunda ısrar ederlerse, kaç değişik şekilde delegasyon seçilebilir?

- (c)'nın Çözümü: eğer iki üye ya beraber gitme ya da hiç gitmeme konusunda ısrar ederlerse, daha öncekine benzer bir sorun ile karşı karşıyayız, fakat (b)'deki rakamları kullanarak çok kolay bir hesap yapabiliriz. İlgilendiğimiz olay A, A = {İkisi de gider ∪ ikisi de gitmez}'dir. (b)'de aşağıdakileri bulmuştuk:

  {3 kişilik komite} sayısı = 120

  {İkisi de gider} sayısı = 8

  {Sadece birisi gider} sayısı = 28 x 2 = 56

  {İkisi de gitmez} sayısı = 56

  böylece, ilave sayma kuralını kullanmak için, karşılıklı dışlayan olaylarına ihtiyacımız vardır. Fakat açıkçası {İkişi de gider} ∩ {İkisi de gitmez} = ∅, böylece iki hesaplamayı birleştirince: 8 + 56 = 64

d) Eğer iki kişi mutlaka MIT'nin yardımcı doçentlerinden (6 tane) ve bir tanesi yarı zamanlı hocalardan(4 tane) seçilecekse, Kaç değişik şekilde delegasyon seçilebilir?

- (d)'nin Çözümü: Bölüm (a)-(c)'yi halı hazırda anladıysanız bu sizin için kolay olmalı. Bu sonucu zaten hesapladığınız anlamına gelmiyor fakat yöntemlerin benzer olduğu anlamına geliyor. Problemi iki bölüme ayıralım: MIT hocalarını seçmek ve yarı zamanlı hocaları seçmek. Bu bize MIT için (6.5)/2 ve yarı zamanlılar için (4) verir. Böylece ((6.5)/2)(4) = 60 sonucuna varırız. Bu sonuç akla uygun mu?

Birbirlerinden nefret edenlerin sonucundan daha az. Halbuki bu beraber gitmeyi kabul etmeyen ama birini seçmek zorunda olduğumuz dört kişi problemine eşit. Dolaysıyla, (b)'de bulduğumuzdan daha az saymayı beklerdik.

Soru 2

Onyedinci yüzyılda, İtalyan kumarbazları üç zarın yüzeyindeki noktaların toplamı üzerine bahse girerlerdi. 9 toplam yapmanın şansının 10 toplam yapma şansına eşit olması gerektiğine inanırlardı. Toplam olarak 9 yapmak için 6 kombinasyon olduğunu not emişlerdi: (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,3,4), (2,2,5), ve (3,3,3). Benzer şekilde 10 için de 6 kombinasyon vardır: (1,4,5), (1,3,6), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). Buna göre kumarbazlar 9 ile 10'un şansının eşit olduğunu tartışırlardı. Ampirik olarak bunun doğru olmadığını fark ettiler. Galileo kumarbazların problemini çözdü. Nasıl?

a) Üç zarın permütasyonlarından kaç tanesinin toplamı 9'dur?
   - (a)'nın Çözümü: toplamı 9 yapan her üçlü sıralama için permütasyonlar:

$$
\begin{aligned}
\#\{1,2,6\} &= 3! = 6 \\
\#\{1,3,5\} &= 3! = 6 \\
\#\{1,4,4\} &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\
\#\{2,3,4\} &= 3! = 6 \\
\#\{2,2,5\} &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\
\#\{3,3,3\} &= \tfrac{3!}{3!} = 1
\end{aligned}
$$

   Böylece, üç zarın toplamının 9 olması için toplam olarak 6+6+3+6+3+1 = 25 yol bulduk.

b) Üç zarın permütasyonlarından kaç tanesinin toplamı 10'dur?
   - (b)'nın Çözümü: Aşağıdaki toplamı 10 olan her bir üçlü sıralamanın permütasyonlarının listesidir: (1,4,5), (1,3,6), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)

$$
\begin{aligned}
\#\{1,4,5\} &= 3! = 6 \\
\#\{1,3,6\} &= 3! = 6 \\
\#\{2,2,6\} &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\
\#\{2,3,5\} &= 3! = 6 \\
\#\{2,4,4\} &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\
\#\{3,3,4\} &= \tfrac{3!}{2!} = 3
\end{aligned}
$$

Böylece, üç zarın toplamının 10 olması için toplam olarak 6+6+3+6+3+3 = 26 yol bulduk

c) Üç zarın toplam olarak kaç tane permütasyonu vardır? Galileo'nun çözümü neydi? Açıklayın.

- (c)'nin Çözümü: üç zarın toplam olarak 2^3 = 216 olası permütasyonu olduğu için, Galileo'nun çözümü çarpım kuralının bir uygulaması olmalı. Her bir zar bize bağımsız bir sonuç verdiği için, üçlü sıralamanın her bir permütasyonu eşit olasılıkla mümkündür. Böylece, bunun anlamı 3 zarın kombinasyonunu düşünmekten ziyade, uniform olarak ve eşit olarak mümkün olan permütasyonlar üzerine düşünmeliyiz. İtalyan kumarbazlar o zaman 10'ların olasılığının 9'ların olasılığından fazla olduğu yönde bir ayarlama yaparlardı: 25/216 < 27/216.

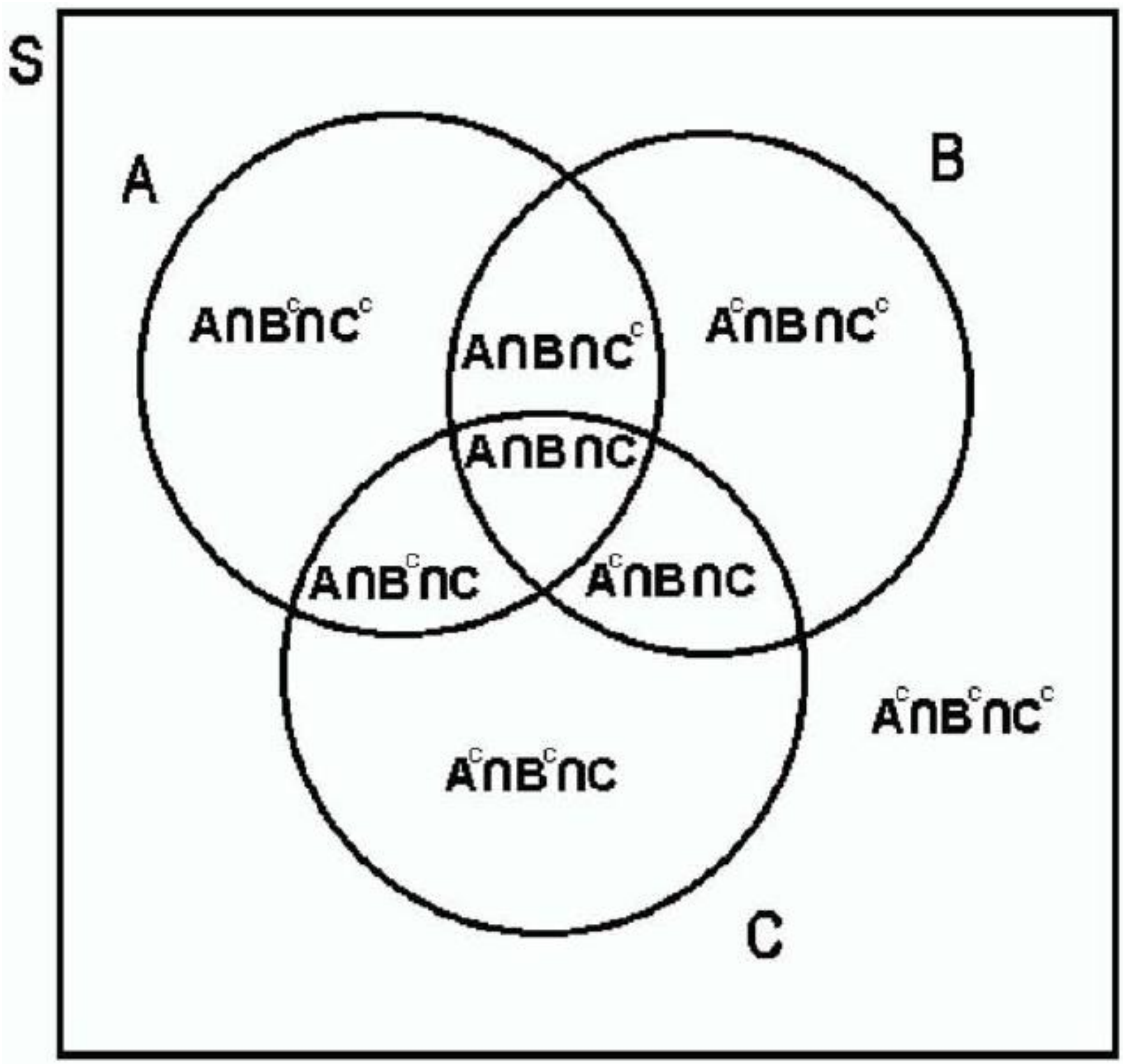
  Not: Sorunun çok hızlı (ama eksik) bir çözümü olabilir. Her bir zarın ortalama katkısının 3.5 ((1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6) olduğunu beklediğimiz için, simetri ve Merkezi Limit Teoreminin olası sonuçların merkezinden uzak olan olayların olasılığının (rasgele değişkenleri toplayınca) daha düşük olacağından hareketle 10 ile 11'in aynı olasılığa sahip olacağını beklerdik. Bu nedenle, 9 ortalama sonuç olan 10.5'ten uzak olduğu için, olasılığın monotonik olarak düşeceğini biliyoruz. Bu derste bunun hakkında daha fazlasını sonra öğreneceksiniz.

Soru 3

Venn diyagramı veya kütle diyagramı sonlu kütle yığınları (şeylerin grupları) arasında bütün varsayımsal olarak olası mantık ilişkilerini gösteren bir diyagramdır. Venn diyagramı John Venn tarafında 1880 civarında keşfedildi. Bir çok alanda kullanılıyorlar, bunlar arasında kütle teorisi, olasılık, istatistik ve bilgisayar bilimleri yer alır (Wikipedia:http://en.wikipedia.org/wiki/Venn_Diagram).

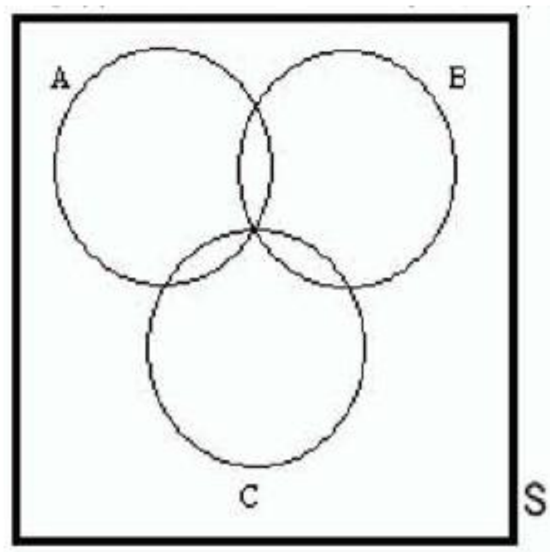
a) Bir S örneklem uzayında yer alan A, B, ve C olayları için bir diyagram çiziniz ve olayların bütün olası birleşim ve kesişimleri uygun bir şekilde etiketleyiniz.

- (a)'nın Çözümü: Aşağıdaki gibi bir örnek verebiliriz:



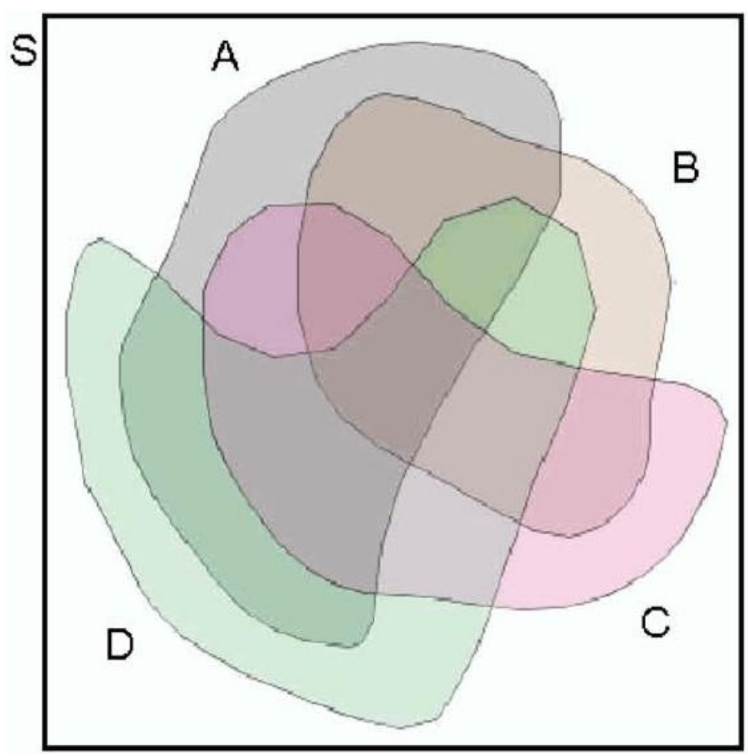
b) Bir S örneklem uzayında yer alan A, B, ve C olayları için bir diyagram çiziniz ve olayların $A \cap B \cap C = \emptyset$ olan bütün olası kombinasyonlarını uygun bir şekilde etiketleyiniz.

- (b)'nin Çözümü: şu web sayfasından uyarlanan örnek aşağıdadır: http://www.cs.kent.ac.uk/events/conf/2004/euler/eulerdiagrams.html



c) Bütün birleşim ve kesişimlerin yer aldığı bir S örneklem uzayında yer alan dört A, B, C ve D olayı için bir diyagram çiziniz(çok fazla zaman harcamayın sadece eğlence olsun diye yapınız) ve olayların bütün olası birleşim ve kesişimleri uygun bir şekilde etiketleyiniz. Bu diyagram kaç tane karşılıklı dışlayan bölge içermelidir?

- (c)'nin Çözümü: (b)'de belirtilen web sayfasından alınan bir örnek:



d) $k \in N$ olaylı böyle bir diyagram kaç tane karşılıklı dışlayan bölge içermelidir?

- (d)'nin Çözümü: Bu problemi iki farklı yoldan deneyeceğiz. mantıki gerekçeyi ortaya koyacağı için, tümevarım (1 için doğru göster, sonra k ve k+1 için) ile bir ispat tercih edilebilirdi, fakat ufak örneklere bakarak başlayacağız.
- Eğer sadece bir olayınız varsa, iki olası bölge vardır: A ve A^C. İki olay ile biliyoruz ki şunlar vardır: $A \cap B$, $A^C \cap B$, $A \cap B^C$, ve $A^C \cap B^C$. Bu dört yapar. Belki de aslında biz bir düzen görüyoruz. Eğer (a)'daki resme bakarsanız ve bütün bölgeleri sayarsanız, 3 olay için sekiz tane olduğunu görürsünüz. İlgili sayı için formülün 2^k olduğunu iddia edebiliriz.

  Tümevarım ile çözüm şöyle olurdu: Bir olay ile, ya içeridesiniz ya dışarıda, bu bize 2 verir. Varsayalım ki k için formül doğrudur: Böyle bir diyagramda 2^k karşılıklı dışlayan olayların sayısıdır. Şimdi k+1'e bakalım. Aynı mantıkla k+1 olayda, hem kendisi ve hem de tümleyeni 2^k olay ile kesişecektir ve 2^{k+1} kadar karşılıklı dışlayan olay oluşturacaklardır.

  Not: Bazılarınızın bu soruyu farklı yorumladığından şüpheleniyorum. Not değerlendirme sürecinde benden kaynaklanan her hangi bir kafa karışıklığının sorumluluğunu aldığımı göz önünde bulunduracağım.

Soru 4

Bir maymunun "ACCLLUUS"u düzenleyerek "CALCULUS" olarak veya "AABEGLR"i düzenleyerek "ALGEBRA" olarak okunmasının şansı var mıdır? (2puan)

- Cevap: "CALCULUS" kaç harftir? Sekiz. "ALGEBRA" kaç harftir? Yedi. "ACCLLUUS" ta harflerin kaç tane tekli permütasyon vardır? Burada ikişer C, L ve U olduğu için $\frac{8!}{2!2!2!} = 7!$ farklı permütasyon vardır. "ALGEBRA" da harflerin kaç tane tekli permütasyonu vardır? en fazla 7! ile başlayacağız, fakat A'ları çift alacağız. Bundan dolayı 7!/2! farklı permütasyon olmak zorundadır, ki bu da 7!'den daha azdır. Dolaysıyla, bir maymunun Shakespeare vari daktilosunda "ALGEBRA" tesadüfi olarak iki katı kadar yüksek olasılık görünecektir.

Soru 5.

Ders 1'de olay bölüntüsünü öğrendiniz. Bir oyun kartı destesinden yapılan tek çekilişle üç farklı bölüntüleme örneği veriniz.

- Cevap: Çok sayıda bölüntüleme yapılabilir fakat burada sadece üç örnek vereceğim:
    - Örnek 1:{ {hepsi kupa}, {hepsi sinekli}, {hepsi maça}, {hepsi karo}}
    - Örnek 2: {{hepsi kırmızı kart}, {hepsi siyah kart}}
    - Örnek 3: {{hepsi çift sayı}, {hepsi tek sayı}, {hepsi as}, {hepsi papaz}}

Soru 6

MIT'nin futbol takımı bir sezonda 12 oyun oynar. Her bir oyunda kazanma olasılıkları 1/3, kaybetme olasılıkları 1/2 ve berabere kalma olasılıklar 1/6'dır. Oyunlar bağımsızdır. Takımın 8-3-1 skoru yapma olasılığı nedir (8 galibiyet, 3 kaybetme ve 1 berabere)? (yazım hatası düzeltilmiştir, ÇN)

- Cevap: her oyun bağımsız bir olay olduğu için, söz konusu skoru belli bir sırada elde etmenin olasılığını hesaplayabiliriz: $(\frac{1}{3})^8(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{6})^1$ = 3.175e - 06. Bu oldukça küçüktür! Ancak, hala o skoru elde etmenin farklı yollarının sayısını hesaplamamız gerekiyor. Eğer 12 oyun varsa ve 8'ini kazandıysak, 3'nü kaybettiysek ve 2 beraberlik varsa, onları $\frac{12!}{8!3!1!}$ = 1980 farklı şekilde sıralayabiliriz. Bu çok yol demektir! Bunun anlamı, Beavers'in söz konusu saygın skoru elde etme olasılığı aşağıdaki gibi oldukça düşük bir değerdir,

$$\frac{12!}{8!3!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1 = .00628715$$

  fakat unutmayınız ki bu sadece tam olarak söz konusu skoru elde etmenin olasılığıdır. Eğer en az onun kadar iyi bir skor istersek, daha iyi olası sezonları da eklemek zorundayız.

  Not: Bu olasılıklar ve skorlar Beavers'in gerçek performansından alınmamıştır.

Soru 7

800 millik yolculukla ülkeyi boydan boya, Boston Limanından Golden Gate Köprüsüne kadar, dolaşıp görülmeye değer bütün yerleri görmek için arkadaşınızla Enterprise firmasında bir araba kiraladınız. Kiraladığınız araba üç farklı türde olabilir: yeni (limon değil), nerdeyse 1 yaşında, veya limon(bozulmak üzere). Çok mil yapmak kiralık bir arabadan çok şey beklenmesine yol açar. Eğer kiraladığınız araba yeni ise (Yeni), 0.05 olasılıkla bozulacaktır. Eğer bir yaşında ise (Bir) 0.1 olasılıkla bozulacaktır. Eğer sadece limon ise (Limon) , 0.9 olasılıkla bozulacaktır. Enterprise'ın size Yeni, Bir ve Limon araba verme olasılıkları, sırasıyla, 0.8, 0.1 ve 0.1'dir. Yolculuğunuz boyunca arabanızın bozulma olasılığını hesaplayınız.

- Cevap: Her bir arabayı elde etmek karşılıklı dışlayan bir olay olduğu için, basitçe her bir arabanın bozulma olasılığını arabayı elde etme olasılığıyla çarpıp toplayabiliriz. Özelikle, yeni bir araba almanın ve bozulmanın bileşik olasılığı 0.8 x 0.05 = 0.04'tür. Aynı şekilde, bir yaşındaki araba ile limon arabasının bileşik olasılığı 0.1 x 0.1 = 0.01 ve 0.1 x 0.9 = 0.09'dur. Dolaysıyla, arabanın bozulmasının toplam olasılığı basitçe

$$\underbrace{0.04}_{\text{Yeni}} + \underbrace{0.01}_{\text{Bir}} + \underbrace{0.09}_{\text{Limon}} = 0.13$$

  Cep telefonunuzu yanınıza aldığınızdan emin olunuz, böylece yardım çağırabilirsiniz!

Soru 8

a) Bayes'in formülü gerçekten önemlidir. Bayes formülünü yazınız ve kelimeler ile açıklayınız.

- (a)'nın Çözümü: Bayes formülü koşullu beklenen değer formülünden kolayca türetilebilir:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A,B)}{P(B)} \\ P(A|B)\,P(B) &= P(A,B) \end{aligned}$$

  Bu simetri ile bize şu formülü verir:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

  Genel bir versiyonu Toplam Olasılık Kanununu kullanmayı gerektirir:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c)}$$

Bayes formülünün bize söylediği, eğer iki olayın marjinalini ve koşullardan birini biliyorsak, diğer koşulun dağılımını elde edebiliriz. Aşağıdaki problemlerde gösterildiği gibi, bu gerçekten faydalıdır.

Dahası aşağıdakiler birkaç yaygın uygulamadır.

b) Varsayalım ki erkeklerin yüzde beşi ve kadınların yüzde 0.25'i renk körüdür. Renk körü bir kişi rasgele seçilmiştir. Bu kişinin erkek olma olasılığı nedir? Eşit sayıda erkek ve kadın olduğunu varsayınız. Kadınların iki katı kadar erkek olursa sonuç ne olur?

- (b)'nin Çözümü: Olay A ve B erkek ve renk körü olmadır. Aşağıdaki formülü yazarız:

$$\text{P(Erkek|Renk Körü)} = \frac{P(Renk\ K\ddot{o}r\ddot{u}|Erkek)P(Erkek)}{P(Renk\ K\ddot{o}r\ddot{u})}$$

$$= \frac{(0.05)\,(0.5)}{(0.5 \times 0.05 + 0.5 \times 0.0025)}$$
$$= 0.95238095 = 95.2\%$$

Bu sonuca, kitlenin %50'sinin erkek, %50'sinin kadın olduğu varsayımını yaparak ulaştık. Ayrıca renk körü olmanın olasılığını, erkek olmanın olasılığı (bağımsız çekiliş) ile renk körünü çarparak ve kadın olmanın olasılığı ile renk körünü çarpıp (iki karşılıklı dışlayan olay) toplayarak elde ettik: 0.5 x 0.05 + 0.5 x 0.0025. Eğer kadınların iki katı kadar erkek olsaydı, A'nın farklı marjinalini hesaba katmak için formülü sadece çok az değiştirmemiz gerekirdi. Bunu yaptıktan sonra:

$$\text{P(Erkek|Renk Körü)} = \frac{P(Renk\ K\ddot{o}r\ddot{u}|Erkek)P(Erkek)}{P(Renk\ K\ddot{o}r\ddot{u})}$$

$$= \frac{(0.05)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3} \times 0.05 + \frac{1}{3} \times 0.0025\right)}$$
$$= 0.97560976 = 97.6\%$$

c) Varsayalım ki Tüberküloz (TB) için mükemmel olmayan bir test vardır. Eğer biri TB'ye yakalanmışsa, yüzde doksan beş olasılıkla test "kırmızı" olacaktır. Eğer bir kişi TB'ye yakalanmamışsa, testin kırmızı gelme olasılığı sadece yüzde ikidir. Son olarak, herhangi bir kişinin TB olma olasılığı, diyelim ki, yüzde beştir (bu Amerika'daki orandır; diğer ülkelerde TB yaygındır). Bir kişi testi yaptırırsa ve kırmızı gelirse, o kişinin TB olma olasılığı nedir?

- (c)'nin Çözümü: Biraz cebirsel işlemler ile, farklı marjinal ve koşullu olasılıkla (b)'de yaptığımızın aynısını yapacağız. Elimizde P(pozitif|TB) = 0.95, P(pozitif|~TB) = 0.02, ve P(TB) = 0.05 var. Bulmaya çalıştığımız ise, P(TB|pozitif)'tir. Marjinal ve koşullu dağılım hakkındaki bilgimizi kullanarak marjinal P(pozitif)'i hesaplayabiliriz.

$$P(\text{pozitif}) = P(TB)P(\text{pozitif}|TB) + P(\sim TB)P(\text{pozitif}|\sim TB)$$

$$= (0.05) \times (0.95) + (1 - 0.05) \times (0.02)$$

Şimdi marjinali bildiğimize göre, Bayes formülünü kullanabiliriz:

$$P(TB|\text{Pozitif}) = \frac{P(Pozitif|TB)P(TB)}{P(Pozitif)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.95 \times 0.05}{(0.05) \times (0.95) + (1 - 0.05) \times (0.02)} \\ &= 0.71428571 = 71.4\% \end{aligned}$$

İşte bu yüzden yaygın olmayan hastalıkları teşhis etmek çok zor oluyor çünkü hatalı küçük pozitif oranlar bile büyük kitlelerde abartıldığı için olmayan bir hastalık pozitif sonuç verebiliyor.