14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 2 - Solutions
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 24 Şubat 2009

Soru 1

Rasgele bir değişkenin Binom dağılıma sahip olduğunu hatırlayınız, eğer

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

ise. Burada n deneme sayısı ve p başarılı olma ihtimaldir. Binom dağılım hakkında izleyen ham sorular için, şunları yapınız: p, n, spesifik "denemeler"in, "başarılar"ın neler olduğunu tanımlayınız. Sonra ilgili dağılımı yazınız ve soruları cevaplayınız.

1. Eğer belli bir kutudaki topların yüzde 25'i kırmızı ise, ve eğer kutudan rasgele 15 top yerine koyma yöntemiyle seçilirse, dört taneden fazla kırmızı top elde etmenin olasılığı nedir?

- 1'in Çözümü: Bu problem için, elimizde p = 0.25, n = 15 var. Her bir "deneme" bir kutudan top seçmedir ve her "başarı" kırmızı top çekmedir. Dörtten fazla top çekme olasılığını iki yoldan hesaplayabiliriz. Bir yol, 5, 6, …, veya 15 top çekmenin olasılıklarını doğrudan toplamaktır. Bu uzun yoldur. Onun yerine tümleyen olayı $\{k > 4\}^C = \{k \leq 4\}$ hesaplarım, buradaki k çekilen kırmızı topların sayısıdır. Böylece, binom dağılım formülünü kullanarak toplamamız gereken sadece 5 olasılığımız olduğu için, problem biraz daha kolaylaşır:

$$\begin{aligned}
P(K=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
P(K=0) &= \binom{15}{0} p^0 (1-p)^{15-0} = .01336346 \\
P(K=1) &= \binom{15}{1} p^1 (1-p)^{15-1} = .06681731 \\
P(K=2) &= \binom{15}{2} p^2 (1-p)^{15-2} = .15590705 \\
P(K=3) &= \binom{15}{3} p^3 (1-p)^{15-3} = .22519907 \\
P(K=4) &= \binom{15}{4} p^4 (1-p)^{15-4} = .22519907
\end{aligned}$$

Bu nedenle, olasılık üzerinden toplam aldığımızda $p(\{k \leq 4\}) = 0.68648594$ elde ederiz. Böylece, tümleyen olayın (bizim aradığımız tümleyen olayın tümleyen olayıdır) olasılığı $p(\{k > 4\}) = 1 - p(\{k \leq 4\}) = 1 - 0.68648594 = 0.31351406$'dır. Dolaysıyla, 11 vaka saymak yerine, sadece 5 tane saymak zorunda kaldık.

2. (3 puan) Varsayalım ki bir ekonomist Amerika'da asgari ücretle çalışan işçiler için bir anket çalışması organize ediyor, ve on üç ile on dokuz yaşı arasında kaç kişinin asgari ücret kazandığını öğrenmek istiyor[1]. Her dört asgari ücretliden birinin 13-19 yaş arasında olduğunu da ayrıca varsayınız. Eğer ekonomist araştırması için 80 asgari ücretliyi bulduysa, tam olarak 14 tane 13-19 yaş arası gençle anket yapma olasılığı nedir? Tam olarak 35 tane genç ile anket yapma olasılığı nedir? Araştırmasında en az 5 tane 13-19 yaş arası genç yer alma olasılığı nedir?

- 2'nin Çözümü: Bu durumda, elimizde yine p = 0.25 ve ne = 80 var. Birinci sorudaki cevabı elde etmek için kullandığımız binom formülünü kullanacağız:

$$P(K=14) = \binom{80}{14} .25^{14} (1-.25)^{80-14} = 0.0319.$$

İkincisi de aynı formülü kullanır:

[1] Asgari ücret üzerine yapılan tartışmada, her zaman vurgulana bir nokta asgari ücret ile çalışanların çoğunun orta sınıf on üç yaş ile on dokuz yaş arası gençler olduğudur. Onlar bir aile geçindirmedikleri için, asgari ücreti artırmanın zararı yararını aşar. Bu nokta hiçbir zaman kimseyi ikna etmemiştir.

$$P(K=35)=\binom{80}{35}.25^{35}(1-.25)^{80-35}=0.00011704.$$

3. (Bonus sorusu) bir şehirde kızamık aşısı olmamış 800 çocuk dahil 5000 çocuk vardır. Şehirdeki çocukların yüzde atmış beşi kreşlere kayıtlıdır. Varsayalım ki belediye sağlık birimi bütün kreşlere henüz aşı olmamış çocuklara aşı yapmak için bir doktor ve bir hemşire gönderdi. Kreşlerde tam olarak *k* kadar çocuğun henüz aşı olmama olasılığı için bir formül bulunuz. (İpucu: Bu tam olarak bir binom dağılım problemi değildir.)

- 3'ün Çözümü: Önceki senelerde, benzer problemler binom dağılım ile tahmin ediliyordu. Büyük n'ler için, bu gibi problemler için binom dağılımının iyi tahminler verdiği anlaşıldı. Dahası, büyük n ve büyük k'ler için, Normal (Gaussian olarak ta bilinir) dağılım da çok iyi tahmin vermektedir. Bu soruyu üç yolu da kullanarak çözeceğim, böylece gerçek cevap için bir fikir sahibi olacaksınız.

  Problem yerine koymadan örneklem ile bir kesikli durum olduğu için, binom dağılımı kullanmak tam olarak doğru değildir. Eğer yerine koyarak örneklem elde etseydik, çok iyi çalışırdı. Bu problem hipergeometrik dağılım için çok iyi bir örnektir (Wikipedia: Hypergeometric Distribution). Hipergeometrik dağılım tipik olarak "bozuk parça" problemleri için kullanılır. Bu problemlerde m tanesi bozuk olan N parça yığını vardır. Sonra yerine koymadan n tane örnek seçersiniz ve tam olarak k birim kadar bozuk parça elde etmenin olasılığını bilmek istersiniz. Bizim durumumuzda, N = 5000 çocuk, m = 800 aşılanmamış çocuk, n = 65 kreşte çocuk vardır ve ve k harfi kreşte aşılanmamış çocuk sayısını temsil etmektedir. Türetilişinin derinliğine girmeden, hipergeometrik dağılım yerine koymadan örneklem aldığınızda koşullu olasılıktaki değişiklikleri hesaba katar. Sezgisel olarak, siz 5000 çocuğu iki gruba bölmenin yolunu bulmaya çalışıyorsunuz- örneklenmiş grup, örneklenmemiş grup. Sonra, örneklenmiş grubun içinde k kadar aşılanmamış çocuğun olasılığını bulmak istiyorsunuz. Wikipedia da şöyle bir ifade var "Formül şöyle anlaşılabilir: (yerine koymadan) $\binom{N}{n}$ olası örneklem vardır. $\binom{m}{k}$ kadar k bozuk parça elde etme yolu vardır ve örneklemin geri kalanını bozuk olmayan parçalar ile doldurmak için $\binom{N-m}{n-k}$ kadar yol vardır". Formül şöyledir:

$$f(k;N,m,n)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

  Bizim durumumuzda şöyle olur:

$$f(k; 5000,\ 800,\ 65) = \frac{\binom{800}{k}\binom{5000-800}{65-k}}{\binom{5000}{65}}$$

Farklı tahminlerin nasıl bir performans gösterdiğini görmek gerçekten çok ilginç olur. Aşağıda büyük N'ler (N = 5000) ile küçük N'lerin (N = 125) nasıl tahmin ettiğini gösteren iki tablo vardır.

	N=5000, m=800, n=65				N=125, m=20, n=65		
k	Hipergeometrik	Binom	Normal	k	Hipergeometrik	Binom	Normal
0	0	0	0.0003	0	0	0	0.0003
1	0.0001	0.0001	0.0009	1	0	0.0001	0.0009
2	0.0009	0.0009	0.0025	2	0	0.0009	0.0025
3	0.0036	0.0035	0.006	3	0.0002	0.0036	0.006
4	0.0107	0.0104	0.0132	4	0.0014	0.0107	0.0132
5	0.0248	0.0243	0.0257	5	0.0061	0.0248	0.0257
6	0.0472	0.0467	0.0448	6	0.02	0.0472	0.0448
7	0.0758	0.0755	0.0698	7	0.0503	0.0758	0.0698
8	0.1047	0.1048	0.0969	8	0.0987	0.1047	0.0969
9	0.1263	0.1269	0.1202	9	0.1531	0.1263	0.1202
10	0.1347	0.1356	0.1331	10	0.1886	0.1347	0.1331
11	0.1283	0.1292	0.1316	11	0.1849	0.1283	0.1316
12	0.11	0.1106	0.1162	12	0.144	0.11	0.1162
13	0.0854	0.0856	0.0916	13	0.0886	0.0854	0.0916
14	0.0604	0.0603	0.0644	14	0.0427	0.0604	0.0644
15	0.0391	0.0389	0.0405	15	0.0158	0.0391	0.0405
16	0.0233	0.023	0.0227	16	0.0044	0.0233	0.0227
17	0.0128	0.0125	0.0114	17	0.0009	0.0128	0.0114
18	0.0065	0.0063	0.0051	18	0.0001	0.0065	0.0051
19	0.0031	0.0029	0.002	19	0	0.0031	0.002
20	0.0013	0.0013	0.0007	20	0	0.0013	0.0007
21	0.0005	0.0005	0.0002	21	0	0.0005	0.0002
22	0.0002	0.0002	0.0001	22	0	0.0002	0.0001
23	0.0001	0.0001	0	23	0	0.0001	0
24	0	0	0	24	0	0	0
25	0	0	0	25	0	0	0

Dolaysıyla, gerçek soru şudur: eğer yaptığınız işlemler ile ilgilenmeseydim, bu problemde en kestirme yolu takip edip sadece binom formülü kullanır mıydınız? Tahminime göre cevap, ne kadar küsurat göstermek isteyeceğinize bağlı olarak değişirdi! :)

Soru İki

Varsayalım ki ağırlık takılmış bir madeni parayı n defa fırlatınız (turanın olasılığı p ve yazının olasılığı q = 1 – p).

1. özelikle k tura ve n-k yazı sırasını elde etmenin olasılığı nedir?

- 1'in Çözümü:

  Belirli bir sırada *k* tura ve *n – k* yazı elde etmenin olasılığı: $p^k q^{n-k}$'dir.

2. k tura ve n-k yazı elde etmenin olasılığı nedir?

- 2'nin Çözümü: Bölüm 1'den belirli bir sırada *k* tura ve *n – k* yazı elde etmenin olasılığı $p^k q^{n-k}$'idi, n tura ve n – k yazı elde etmenin permütasyonunu hesaba katmak zorundayız. Basitçe Turaları "H" ve yazıları "T" ile gösterip kaç farklı kelime yazabileceğimizi bulmaya çalışacağımız bir "ALGEBRA" ve "CALCULUS" problemi gibi düşünebiliriz. Bu oldukça basittir, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Bu binom dağılımındaki $\binom{n}{k}$ katsayısının aynısıdır. Dolaysıyla, bu problem için sadece binom formülüne ihtiyacımız var:

$$P(k \text{ tura}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3. X ≡ n atıştaki tura sayısı olsun. X'in yoğunluk olasılık fonksiyonun nedir?

- 3'ün çözümü: Burada sadece 2'nin cevabını yeniden ancak sembolleri X ve onun PDF'si, f(x;n), için biraz değiştirerek yazmak zorundayım.

$$P(X = x) = f(x; n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

4. Bu sorunun Birinci Problem setindeki MIT Beaver futbol takımın sorusuyla ilgisi nedir? Açıklayınız.

- 4'ün Çözümü: üç farklı sonucumuz olduğu için, biraz genellemeyle, MIT Beaver futbol takımının sorusu esasında aynıydı. Bunu iki binom denemesi olarak yazabilirdik (berabere sayısı ve geri kalan oyunlarda kazanılan oyun sayısı) veya multinom (multinomial) teorem olarak bilinen binom teoreminin biraz daha genel halinin kullanarak yazabilirdik (Wikipedia: Multinomial Theorem). Bu katsayıları şöyle yazarız:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

Kullanacağımız dağılım multinom dağılım olurdu (Wikipedia: Multinomial Theorem):

$$P(K_1 = k_1, ..., K_m = k_m; n) = \binom{n}{k_1, ..., k_m} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$$

Problem Set 1'deki MIT Beavers sorusunun cevabına yakından baktığımızda, farklı olasılıklar ile 3 ihtimalin olduğu hemen belirginleşir: her birisinin belirli sayıdaki k değeri için, Kazanma (p_W), Kaybetme(P_L) ve Berabere (P_T)'dir. Böylece, MIT Beaver sorusu iki binomu eşleştirir, ki buna da multinom teorem denilir.

Şunu vurgulamalıyım: Eğer binom teorem hakkında hiçbir şey bilmeseydiniz bile, çarpım kuralı ve permütasyonun sayma kuralı teknikleri o soruyu cevaplandırmak için yeterli olurdu. Bu durum, bu tür soruların üstesinden gelmenin genel yöntemlerini öğrenmenize yardımcı olacaktır.

Varsayalım ki şimdi içinde iki madeni para olan bir şapkanız var. Paralardan biri ağırlıklıdır, biri adildir (düzgün). Rasgele birini seçtiniz ve onu *n* defa fırlattınız.

1. Y ≡ n atıştaki tura sayısı olsun. Y'nin P.D.F.'si nedir?

- 1'in Çözümü: Bu sorunun çözümü dağılımların karışımıdır. İki madeni paramız var, her birini P = 1/2 olasılıkla kullanıyoruz. Dolaysıyla, PDF zamanın yarısında düzgün (adil) parayı diğer yarısında ağırlıklı parayı kullanmak olacaktır.

$$P(Y = y; n) = \underbrace{\frac{1}{2}\binom{n}{y} 0.5^y (1-0.5)^{n-y}}_{\text{Düzgün Para}} + \underbrace{\frac{1}{2}\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}}_{\text{Ağırlıklı Para}}$$

2. Y = k veri iken, düzgün parayı seçme olasılığınız nedir?

- 2'nin Çözümü: Bu sorunun cevabını elde etmek için, yine Bayes kuralını uygulayacağız, fakat bu sefer PDF'li olacak. P(Düzgün| Yb = k)'yi bilmek istiyoruz. 1.nci sorudan paydanın ne olması gerektiğini biliyoruz(hemen yukarıda):

P(Y = k) = P(Y = k|Düzgün)P(Düzgün) + P(Y = k|Ağırlıklı)P(Ağırlıklı)

Diğer bölümü doğrudan elde etmemiz gerekiyor: P(Düzgün) = 1/2 ve P(Y = k|Düzgün) = $\binom{n}{y}$ $0.5^y(1-0.5)^{n-y}$ düzgün paranın PDS'sidir. Böylece, şimdi Bayes Kuralını kullanabiliriz:

$$P(\text{Düzgün}|Y = k) = \frac{P(Y=k|Düzgün)P(Düzgün)}{P(Y=k|Düzgün)P(Düzgün)+P(Y=k|Ağırlıklı)P(Ağırlıklı)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\binom{n}{k}0.5^k(1-0.5)^{n-k}}{\underbrace{\frac{1}{2}\binom{n}{k}0.5^k(1-0.5)^{n-k}}_{\text{Düzgün Para}}+\underbrace{\frac{1}{2}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}_{\text{Ağırlıklı Para}}}$$

Soru Üç

Varsayalım ki dengeli iki zarınız var. Aşağıdaki her bir rasgele değişken için olasılık dağılımını belirleyiniz ve çiziniz:

1. X görünen iki rakam arasındaki farkın mutlak değeri olsun

- 1'in Çözümü: iki zar arasındaki mutlak farkın PDF'si -5 ile +5 arasında 11 farklı değer alır. Bütün ihtimalleri sayabilirdik, ya da zarların simetriğinden ötürü bunu aynı sonucun sadece etiketini değiştirdiğimiz sıradan iki zar problemi gibi değerlendirebilirdik. Bu durumda, desteği kaydırılmış aynı dağılımı kullanabileceğimiz anlaşılıyor:

Sonuç, x	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
Elde etme yollarının sayısı	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

İki zar için 36 sonuç olduğundan aşağıdakini elde ederiz:

$X=x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

f(x) tahtaya çizilecektir.

2. Y görünen iki rakamın çarpımı olsun

- 2'nin Çözümü: Zar üzerindeki iki sayının çarpımı aşağıdaki sonuçları alabilir:

Sonuç, y	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
Elde etme yollarının sayısı	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4
$f(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$

Sonuç, y	15	16	18	20	24	25	30	36
Elde etme yollarının sayısı	2	1	2	2	2	1	2	1
$f(y)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

f(y) tahtaya çizilecektir.

3. Z görünen çift sayılar olsun

- 3'ün Çözümü: Üç olası sonuç vardır: 0, 1, ve 2. 1 çift sayının olasılığı 0 veya 2'nin olasılığının iki katıdır. Böylece, şu değerlere sahip PDF'miz var: f(0) = 0.25, f(1) = 0.5 ve f(2) = 0.25. Bu bilgiden hareketle f(z)'nin çizimi kolaydır ve tahtada gösterilecektir.

Soru Dört

Varsayalım ki duman detektörünüz için daha yeni bir pil aldınız ve pilin ömrü rasgele bir değişkendir. Bu değişkenin pdf'si aşağıdaki gibidir,

$$f_x(x) = ke^{-x/\beta}$$

burada $x \in (0, \infty)$. t ve s'nin reel negative olmayan sayılar olduğunu varsayın.

1. k'nin değerini p.d.f.'nin özeliklerin kullanarak bulunuz.

- 1'in Çözümü: PDF'nin integralini 1 olması gerektiğini biliyoruz:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f_X(x)dx &= \int_0^{\infty} ke^{-x/\beta}dx \\
1 &= k\int_0^{\infty} e^{-x/\beta}dx \\
\frac{1}{k} &= -\beta\left[e^{-x/\beta}\right]_0^{\infty} \\
k &= \frac{1}{-\beta\,[0-1]} \\
k &= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

2. $P(X \geq t)$ için bir ifade bulunuz.

- 2'nin Çözümü: Bu ifade kolaydır çünkü şimdi elimizde k sabitinin integrali var:

$$P(X \geq t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}dx$$

Bu şöyle basitleştirilebilir,

$$P(X \geq t) = e^{-t/\beta}$$

3. $P(X \geq t + s|X \geq s)$ için bir ifade bulunuz.

- 3'ün Çözümü: Sadece koşullu olasılığın formülünü kullanabiliriz:

$$P(X \geq t+s|X \geq s) = \frac{e^{-(t+s)/\beta}}{e^{-s/\beta}}$$
$$P(X \geq t+s|X \geq s) = e^{-t/\beta}$$

4. Varsayalım ki pilleriniz *s* hafta kadar bitmeden dayandılar. Yukarıdaki cevaplarınıza dayanarak, ilk taktığınız ana göre şimdi pillerin biteceği konusunda daha çok kaygı taşıyor musunuz?

- 4'ün Çözümü: Eğer pillerim bitmeden s hafta dayanmışsa, 3'teki cevabıma göre, daha önceki gibi meraklanmalıyım, çünkü pillerin bitmemiş olması bitmenin olabilirliği konusunda bana yeni hiçbir şey söylemiyor. Üstel dağılım (mevcut dağılım) bu çok özel özelliğe sahiptir, yani bir şeyin ne kadar sürdüğü önemli değildir, her hangi bir zamanda onun bozulma oranı/olasılığı sabittir.

Soru beş

Varsayalım ki mavi veya kırmızı çiçek açan egzotik bir çiçeğin renginin genetik mirasının izlerini araştırıyoruz. Çiçek, alıkonulamayacak (evcilleştirilemeyen) utangaç sincap-maymunu ile ortak yaşam alanına sahip olduğu için, araştırma sorusunu cevaplandırmak için kontrollü bir laboratuvar deneyini yapmanın herhangi bir yolu yoktur.

Her bir çiçek hem "baba"sına hem de "anne"sine ait renk genlerini taşımaktadır, bu nedenle, tabloda görüldüğü gibi çiçeğin genetik bilgisi gen çiftleri (G_M, G_F) olarak ifade edilebilir:

BABA

		B	R
ANNE	B	(B, B)	(B, R)
	R	(R, B)	(R, R)

Eğer n az bir R türü gen (örneğin (R, B) kombinasyonu gibi) içeren herhangi bir çiçek kırmızı açarsa kırmızı çiçek, R, ile ilgili fenotipin (kalıtsal dış görünüş, Ç.N.) *baskın* olduğu söylenir. Ya mavi ya da kırmızı baskındır, fakat çiçeğin bir tek numunesini görmeden önce, her iki ihtimalin eşit olduğunu düşünürüz:

1. R ve B'nin alellerinin eşit sıklıkta olduğunu önceden bildiğimizi varsayalım, yani i = F, M için $P_i(B) = P_i(R) = ½$'dir ve "ebeveynler" arasında bağımsızıdırlar, yani $P_{FM}(G_F, G_M) = P_F(G_F)\ P_M(G_M)$. Eğer mavi fenotip baskın ise, veri bir numunenin kırmızı açma olasılığı nedir? Eğer R baskın ise, kırmızı açma olasılığı nedir?

- 1'in Çözümü: Çiçeğin kırmızı açma olasılığı her iki alelde sadece baskın olmayan genotipin elde edilme olasılığıdır. Böylece şunu hesaplarız:

$$P_{FM}(R_F, R_M) = P_F(R_F)P_M(R_M) = (1/2)(1/2) = 1/4$$

Eğer R baskın ise, bunu mavileri kırmızı ile etiketleyerek, tümleyen olayları ve olasılıklarını alarak çözebiliriz. Bu da 3/4 sonucunu verir.

2. Bitkinin bir tek numunesini bulmak çok zaman alır, bundan ötürü iki aylık tam destekli MIT botanikçilerinin Amazon yolculuğundan getirebildikleri topu topu 15 çiçekli bir örneklemdi. Eğer R baskın ise, 15 çiçekten 9 tanesinin kırmızı çiçek açma olasılığı nedir?

- 2'nin çözümü: Bu bir başka temel binom sorusudur. P(Kırmızı Çiçek Açma) = 3/4 olasılıklı 15'lik bir örneklemimiz var ve bunlar aşağıdaki formülü doğurur:

$$P(9\ \text{Kırmızı Açma; 15 Çiçek}) = \binom{15}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{15-9}$$

3. Yolculuktan gerçekte 9 kırmızı ve 6 mavi renkli çiçek ile dönülmüştür. Bu veriyken, kırmızı fenotipin baskın olma ihtimali nedir?

- 3'ün Çözümü: Yine Bayes kuralını kullanacağız. Sadece parçaları bir araya getirmemiz gerekiyor. Allellerin eşit sıklıkta olduğunu biliyoruz, bu da allelerin dağılımının örneklemi etkilememesi gerektiği anlamına geliyor. Sadece şüphelendiğimiz şey hakkında düşünmeliyiz. Önceden söylemek gerekirse, kırmızıya karşı mavi allelin baskın olma şansı eşittir. Dolaysıyla, P(Kırmızı Baskın) = 1/2. O zaman kırmızı ve mavi fenotipler için binom dağılımı vardır:

$$P(\text{9 Kırmızı Çiçek}|\text{Kırmızı Baskın; 15 Çiçek}) = \binom{15}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{15-9}$$

$$P(\text{6 Mavi Çiçek}|\text{Mavi Baskın; 15 Çiçek}) = \binom{15}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{15-6}$$

Bu bize Bayes kuralı için payda ve hesaplama için gerek duyduğumuz bütün parçaları vermektedir:

$$P(\text{K Bas}|\text{9 K}) = \frac{P(\text{9 Kırmızı Çiçek}|\text{Kırmızı Baskın})P(\text{Kırmızı Baskın})}{P(\text{9 K}|\text{K Bas})P(\text{K Bas}) + P(\text{6 M}|\text{M Bas})P(\text{M Bas})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\binom{15}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^9\left(\frac{1}{4}\right)^{15-9}}{\frac{1}{2}\binom{15}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^9\left(\frac{1}{4}\right)^{15-9} + \frac{1}{2}\binom{15}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^{15-6}}$$

$$P(\text{K Bas}|\text{9 K}) = 0.9643$$

Üç çiçek açma arasındaki farkın size % 95'lik bir anlamlılıkla bir şey söylemek için yeterli olması gerçekten ilginçtir. Ancak, bunun gerçekte 6 çiçeğin farkı olduğuna dikkat ediniz, çünkü 9 – 6 = 3' e karşı 6 – 9 = -3.

4. Aynı sırada bir doktora öğrencisi aynı bölgede aynı araştırma sorusu üzerinde tam iki yıldır çalışmaktadır. Öğrenci, dünyadan tamamen kopuktur ve diğer yolculukların bulgularından henüz haberdar değildir, bu nedenle de çıkarımlarını sadece kendi örneklemine dayandırmak zorundadır. Eğer bulduğu N çiçekten x tanesi kırmızı ise, R'nin baskın olma olasılığı nedir? Bu sonucun doğrudan N'ye değil, fakat sadece kırmızı açma sayısı x ile mavi açma sayısı N-x arasındaki farka bağlı olduğunu gösteriniz.

- 4'ün Çözümü: 3'teki çözümü kullanarak bu soruyu cevaplandırabiliriz:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P(K\ Bas|x\,K)} &= \frac{\mathrm{P(x\ K\i rm\i z\i\ \c{C}i\c{c}ek|K\i rm\i z\i\ Bask\i n)P(K\i rm\i z\i\ Bask\i n)}}{\mathrm{P(x\ K|K\ Bas)P(K\ Bas) + P(\ N - x\ M|M\ Bas)P(M\ Bas)}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\binom{N}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{N-x}}{\frac{1}{2}\binom{N}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{N-x}+\frac{1}{2}\binom{N}{N-x}\left(\frac{3}{4}\right)^{N-x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}} \\
&= \frac{\binom{N}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{N-x}}{\binom{N}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{N-x}+\binom{N}{N-x}\left(\frac{3}{4}\right)^{N-x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}} \\
&= \frac{\binom{N}{x}}{\binom{N}{x}+\binom{N}{N-x}\left(\frac{3}{4}\right)^{N-2x}\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-N}} \\
&= \frac{1}{1+3^{(N-x)-x}}
\end{aligned}
$$

bu sadece x ile N – x arasındaki farkın fonksiyonudur ya da keşf edilen mavi ve kırmızı çiçekler arasındaki farktır.