14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 4 - Çözümler
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 17 Mart 2009

Soru Bir

Varsayalım ki X'in PDF'si aşağıdaki gibidir

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. $Y = X^{1/2}$ için PDF tanımlayınız.

- 1'in Çözümü: PDF'yi bulmak için, CDF'yi ya da "2-adım" yöntemini kullanabiliriz: y > 0 için

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{2}} \leq y) = \int_{x:x^{\frac{1}{2}} \leq y} f_X(x)dx \\ &= \int_{x:x \leq y^2} f_X(x)dx \\ &= \int_0^{y^2} e^{-x}dx \\ &= (-e^{-x})_0^{y^2} \\ F_Y(y) &= 1 - e^{-y^2} \\ f_Y(y) &= 2ye^{-y^2} \end{aligned}$$

iken $y \leq 0$ için sıfırdır.

2. $k \in N$ için $W = X^{1/k}$'nin PDF'sini tanımlayınız.

- 2'nin Çözümü: Bu 1'in doğrudan bir genelleştirilmesidir: w > 0 için aşağıdakini yazabiliriz,

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= P(W \le w) = P(X^{\frac{1}{k}} \le w) = \int_{x:x^{\frac{1}{k}} \le w} f_X(x)dx \\
&= \int_{x:x \le w^k} f_X(x)dx \\
&= \int_0^{w^k} e^{-x}dx \\
&= (-e^{-x})_0^{w^k} \\
F_W(w) &= 1 - e^{-w^k} \\
f_W(w) &= kw^{k-1}e^{-w^k}
\end{aligned}
$$

Bu w ≤ 0 için sıfırdır.

Soru İki

Varsayalım ki rasgele bir değişken olan X'in PDF'si aşağıdaki gibidir.

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & 0 < x < 5 \text{ için} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}
$$

Aynı zamanda, varsayalım ki Y ≡ X(5 – X)'dir. Y'nin PDF'si ve CDF'sini belirleyiniz. Bunu iki yoldan çözebilirsiniz. İlk olarak sınıfta verilen formülü kullanarak $f_Y(y)$'yi hesaplayabilirsiniz:

$$
f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|
$$

g(x)'in tek parçalı monoton olduğuna dikkat ediniz. İkincisi, tekrarlarda yaptığımız gibi, *FY(y) = P[Y ≤ y]* bularak doğrudan çözebilirsiniz. Eğer her iki yoldan yaparsanız fazladan puan alırsınız.

- Çözüm: İlk önce ters fonksiyon $g^{-1}(y) = X$'i bulmamız gerekiyor. Çözümde şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} Y &= X(5-X) \\ 0 &= -X^2+5X-Y \\ X &= \frac{5 \pm \sqrt{25-4Y}}{2} \end{aligned}$$

Şimdi aralık üzerinden iki kökü olan parçalı monotonik g(x) bir fonksiyonumuz olduğu için, yukarıdaki dönüşüm sonuçlarını uygulayabiliriz. Bunun bir parabol olduğunu bildiğimiz için, iki monotonik parçayı elde etmek için (biri montonik olarak artan, bir azalandır) türevi sıfıra eşitleyerek çözeriz. Dolayısıyla, şunu buluruz:

$$g'(x) = 5 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Orta noktada bir maksimum olduğunu anlaşılıyor (ikinci türev negatif olduğu için).

Şimdi basitçe formülü fonksiyonun her iki yarısına uygulayıp toplayacağız:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \\ &= \frac{2}{25}\left(\frac{5 \pm \sqrt{25-4y}}{2}\right)\left|\frac{d}{dy}\frac{5 \pm \sqrt{25-4y}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{50}\left(5 \pm \sqrt{25-4y}\right)\left|\frac{d}{dy}5 \pm \sqrt{25-4y}\right| \\ &= \frac{1}{50}\left(5 \pm \sqrt{25-4y}\right)\left|\pm\frac{\frac{1}{2}\cdot -4}{\sqrt{25-4y}}\right| \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\sqrt{25-4y}}+1\right) & \text{if } 0 < y \leq \frac{25}{4} \\ \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\sqrt{25-4y}}-1\right) & \text{if } 0 < y \leq \frac{25}{4} \end{cases} \\ &= \frac{1}{25}\left(\frac{5}{\sqrt{25-4y}}+1\right)+\frac{1}{25}\left(\frac{5}{\sqrt{25-4y}}-1\right) \\ f_Y(y) &= \frac{2}{5\sqrt{25-4y}} \end{aligned}$$

CDF'yi elde etmek için sadece integralini alacağız:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_0^y \frac{2}{5\sqrt{25-4y'}}dy' \\
&= \left[\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)2\sqrt{25-4y'}\right]_0^y \\
&= \left[-\frac{1}{5}\sqrt{25-4y'}\right]_0^y \\
&= \left[-\frac{1}{5}\sqrt{25-4y}+\frac{1}{5}\sqrt{25}\right] \\
F_Y(y) &= 1-\frac{1}{5}\sqrt{25-4y}.
\end{aligned}
$$

Hem PDF ve hem CDF $0 < y < 25/4$ aralığında tanımlanmıştır ve diğer durumlarda PDF sıfırdır. Eğer $y \leq 0$ ise CDF sıfır, eğer $25/4 < y$ ise CDF birdir. Sadece cevabımızı kontrol etmek için (fazladan not alabilmek için), ayrıca CDF ve "2-adım" yöntemini kullanacağız:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X(5-X) \le y) = \int_{x:x(5-x)\le y} f_X(x)dx \\
&= \int_{x:0\le x\le \frac{5-\sqrt{25-4y}}{2}} \frac{2}{25}xdx + \int_{x:\frac{5+\sqrt{25-4y}}{2}\le x\le 5} \frac{2}{25}xdx \\
&= \left(\frac{1}{25}x^2\right)_0^{\frac{5-\sqrt{25-4y}}{2}} + \left(\frac{1}{25}x^2\right)_{\frac{5+\sqrt{25-4y}}{2}}^5 \\
&= \frac{1}{100}\left(5-\sqrt{25-4y}\right)^2 + 1 - \frac{1}{100}\left(5+\sqrt{25-4y}\right)^2 \\
&= 1-\frac{1}{100}\left[\left(5-\sqrt{25-4y}\right)^2-\left(5+\sqrt{25-4y}\right)^2\right] \\
&= 1-\frac{1}{100}\left[\left(25-10\sqrt{25-4y}+25-4y\right)-\left(25+10\sqrt{25-4y}+25-4y\right)\right] \\
&= 1-\frac{1}{100}\left(20\sqrt{25-4y}\right) \\
F_Y(y) &= 1-\frac{1}{5}\sqrt{25-4y} \\
f_Y(y) &= \frac{2}{5\sqrt{25-4y}}
\end{aligned}
$$

bu $0 < y \leq 25/4$ aralığı içindir. Aynı sonucu aldık. Harika!

Soru Üç

(Bain/Engelhardt, s. 226)

(6 Puan) X [0, 1] aralığında uniform dağılımlı rassal bir değişken olsun (yani ilgili aralıkta f(x) = 1'dir, diğer durumlarda sıfırdır). Sınıftaki iki yöntemi (2-Adım/CDF tekniği ve dönüştürme yöntemi) kullanarak aşağıdakilerin her birsinin PDF'sini belirleyiniz:

1. $Y = X^{1/4}$

- 1'in Çözümü: İlk önce $g(x) = X^{\frac{1}{4}} \Rightarrow g^{-1}(y) = y^4$'tür. 12-adım" tekniğini kullanınca:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{4}} \leq y) = \int_{x:x^{\frac{1}{4}} \leq y} f_X(x)dx \\
&= \int_{x:x \leq y^4} dx \\
&= (x)_0^{y^4} \\
F_Y(y) &= y^4 \\
f_Y(y) &= 4y^3
\end{aligned}$$

Dönüştürme tekniğini kullanarak (g(x)'in sıfır olmayan f(x) desteği için monotik olduğunu kontrol ettikten sonra aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \\
&= f_X(y^4) \left| \frac{d}{dy} y^4 \right| \\
&= 1 \left| 4y^3 \right| \\
f_Y(y) &= 4y^3
\end{aligned}$$

Yukarıdaki $f_Y(y)$ [0, 1] aralığı için tanımlanmıştır, diğer durumlarda ise sıfırdır.

2. $W = e^{-x}$

- 2'nin Çözümü: İlk önce $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g^{-1}(w) = -\log w$ (not: ekonomide veya diğer bir çok bilim dalında "log" tipik olarak e tabanlı log olan ve "ln" ile gösterilen "doğal logaritma"dır). Eşitsizliğe dikkat ederek, "2-adım" tekniğinin sonucu aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= P(W \leq w) = P(e^{-x} \leq w) = \int_{x:e^{-x} \leq w} f_X(x)dx \\
&= \int_{x:x \geq -\log w} dx = \\
&= \int_{x:x \leq \log w} dx = \\
&= (x)_0^{\log w} \\
F_W(w) &= \log w \\
f_W(w) &= \frac{1}{w}
\end{aligned}
$$

Dönüştürme tekniğini kullanarak (g(x)'in sıfır olmayan f(x) desteği için monotik olduğunu kontrol ettikten sonra) şunu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= f_X(g^{-1}(w)) \left| \frac{d}{dw} g^{-1}(w) \right| \\
&= f_X(-\log w) \left| \frac{d}{dw} - \log w \right| \\
&= 1 \left| -\frac{1}{w} \right| \\
f_W(y) &= \frac{1}{w}
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki $f_W(w)$ $[\frac{1}{e}, 1]$ için tanımlanmıştır, diğer durumlarda ise sıfırdır.

3. Z = 1 - e^{-x}

- 3'ün Çözümü: İlk önce g(x) = 1- $e^{-x} \Longrightarrow g^{-1}(z) = g^{-1}(w)$ = -log(1-z) (not: ekonomide veya diğer bir çok bilim dalında "log" tipik olarak e tabanlı log olan ve "ln" ile gösterilen "doğal logaritma"dır). Eşitsizliğe dikkat ederek, "2-adım" tekniğinin sonucu:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(e^{-x} \leq z) = \int_{x:1-e^{-x} \leq z} f_X(x)dx \\
&= \int_{x:x \leq -\log(1-z)} dx \\
&= (x)_0^{-\log(1-z)} \\
F_Z(z) &= -\log(1-z) \\
f_Z(z) &= \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

Dönüştürme tekniğini kullanarak (g(x)'in sıfır olmayan f(x) desteği için monotik olduğunu kontrol ettikten sonra):

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_X(g^{-1}(z)) \left| \frac{d}{dz} g^{-1}(z) \right| \\
&= f_X(-\log(1-z)) \left| \frac{d}{dw} - \log(1-z) \right| \\
&= 1 \left| \frac{1}{1-z} \right| \\
f_Z(z) &= \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki $f_Z(z)$ $[0, 1-\frac{1}{e}]$ için tanımlanmıştır, diğer durumlarda ise sıfırdır.

Soru Dört

(Bain/Engelhardt, s. 227)

Eğer $X \sim$ Binom(n, p) ise, Y = n – X'in PDF'sini bulunuz.

Çözüm: Rasgele değişken Y = n – X doğrudan bir kesikli dönüşümdür. Ters fonksiyonu $g^{-1}(y) = n - Y$ olarak yazarız. Şimdi binom pdf'yi yazabiliriz:

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Yakından bakınca doğrusal dönüşümde yerine koyabileceğimizi görürüz(monotoniktir, Jacobian -1'dir, yani bütün olası sonuçlar için mutlak değeri 1'dir):

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \binom{n}{n-y} p^{n-y}(1-p)^{n-(n-y)} \\ &= \binom{n}{y} p^{n-y}(1-p)^{y} \\ &= \quad Binom\,(n, 1-p) \end{aligned}$$

Burada, n Bernoulli denemede, basit dönüşümün basitçe başarısızlığı başarı olarak, veya tersi, yeniden etiketlendirdiğini görüyoruz. Bu beklediğimizdir.

Soru Beş

(Bain/Engelhardt, s. 227)

X ile Y'nin bileşik PDF'si $0 < x < \infty$ ve $0 < y < \infty$ için $f(x,y) = 4e^{-2(x+y)}$'*dir*, diğer durumlarda ise sıfırdır.

1. W = X + Y'nin CDF'sini bulunuz.

- 1'in Çözümü: Z = X' i tanımlayarak, W ile Z'nin bileşik dağılımını belirleyerek ve daha sonra Z' ye göre integrali alıp W' nun marjinalini hesaplayarak, W = X + Y'nin CDF'sini elde edebiliriz. İlk önce, w ve z'yi elde etmek ve tersini bulmak için, x ve y'nin dönüşümünü tanımlayacağız:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (w,z) \\
g^{-1}(w,z) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = (x,y)
\end{aligned}
$$

Bir kere g(x, y)’yi matris formatında doğrusal dönüşüm olarak yazarsak, Jacobian’ı elde etmek oldukça kolaydır:

$$
J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Böylece, g(x,y) doğrusal (ve bundan ötürü monotonik) olduğu için, sadece dönüştürme tekniğini kullanabiliriz:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 4e^{-2(x+y)} \\
f(w,z) &= f(g^{-1}(w,z))\,|J| \\
&= f(z, w-z)\,|-1| \\
&= 4e^{-2(z+(w-z))} \\
&= 4e^{-2w}
\end{aligned}
$$

burada |.| determinantın mutlak değerini ifade eder. Şimdi, CDF’yi elde etmek için W’nun marjinalini elde etmek gerekir. Sonra W’nun Z < W < ∞ şeklindeki sınırını belirleyen X ve Y sınırlarını göz önünde bulundurarak integrali alırız:

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_0^w f(w,z)dz \\
&= \int_0^w 4e^{-2w}dz \\
&= 4we^{-2w}
\end{aligned}
$$

Şimdi marjinalı elde ettiğimize göre, parçalı integrali alarak CDF’yi elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= \int_0^w f_W(w')dw' \\
&= \int_0^w 4w'e^{-2w'}dw' \\
&= (-2w'e^{-2w'})_0^w - \int_0^w -2e^{-2w'}dw' \\
&= -2we^{-2w} - e^{-2w} + 1 \\
F_W(w) &= 1 - (2w+1)e^{-2w}
\end{aligned}
$$

Ayrı bir seçenek olarak, sadece bu probleme göre uyarlanmış büklüm formülünü kullanabilirdik:

$$f_W(w) = \int_0^\infty f(x, w-x)dx$$

Bu aynı sonucu verirdi:

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_0^\infty f_X(x)f_Y(w-x)dx \\
&= \int_0^w 2e^{-2x} \cdot 2e^{-2(w-x)}dx
\end{aligned}
$$

Bu sonuç yukarıdaki integralin aynısıdır.

2. U = $\frac{X}{Y}$ ve V = X için bileşik pdf'yi bulunuz.

- 2'nin Çözümü: 1'deki yöntemin aynısını kullanacağız. g(x, y) ve g^{-1}(u, v)'yi tanımlayınız:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= (\frac{x}{y}, x) = (u,v) \\
g^{-1}(u,v) &= (v, \frac{v}{u}) = (x,y)
\end{aligned}
$$

ilgili Jacobian:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{bmatrix}$$

burada Jacobian’ın determinantı |J| = $\frac{v}{u^2}$’dir. x > 0 ve y > 0 olduğu için, çarpımın kökleri hakkında kaygılanmadan dönüştürme tekniğini kullanabiliriz:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4e^{-2(x+y)} \\ f(u,v) &= f(g^{-1}(u,v))\,|J| \\ &= f(v,\frac{v}{u})\frac{v}{u^2} \\ &= 4e^{-2(v+\frac{v}{u})}\frac{v}{u^2} \\ f(u,v) &= 4\frac{v}{u^2}e^{-2v\cdot\frac{u+1}{u}} \end{aligned}$$

Böylece, birleşik pdf’yi elde ettik.

3. U’nun marjinal pdf’sini bulunuz.

3’ün Çözümü: U’nun marjinal pdf’si v’ye göre integral alınarak bulunur:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(u,v)dv &= \int_0^\infty 4\frac{v}{u^2}e^{-2v\cdot\frac{u+1}{u}}dv \\ &= \left(\frac{\frac{4}{u^2}v}{-2(1+\frac{1}{u})}e^{-2(1+\frac{1}{u})v}\right)_0^\infty - \frac{-4}{2u^2(1+\frac{1}{u})}\int_0^\infty e^{-2(1+\frac{1}{u})v}dv \\ &= \frac{2}{u^2(1+\frac{1}{u})}\left(\frac{1}{-2(1+\frac{1}{u})}e^{-2(1+\frac{1}{u})v}\right)_0^\infty \\ &= \frac{2}{u^2(1+\frac{1}{u})}\left(0-\frac{1}{-2(1+\frac{1}{u})}\right) \\ f_U(u) &= \frac{1}{(u+1)^2} \end{aligned}$$

Sonuç olarak, sadece geçerli bir PDF'ye ulaştığımız kontrol etmek için, integralini alarak gerçekten de integralin bire eşit olduğunu doğrulayabiliriz:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_0^\infty \frac{1}{(u+1)^2} du \\ &= 0 - \frac{-1}{0+1} = 1 \end{aligned}$$