14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 6 - Çözümler
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 7 Nisan 2009

Soru Bir

X [0,1] aralığında uniform olarak dağılan bir rasgele değişken olsun (yani ilgili aralıkta f(x) = 1, diğer yerlerde sıfırdır). Problem Seti 4'te aşağıdaki her bir dönüşümün PDF'sini belirlemek için "2-Adım"/CDF tekniği ve dönüştürme yöntemini kullandınız, Y = g(X). Şimdi PDF'leriniz olduğuna göre aşağıdaki her bir dönüşüm için (a)$\mathbb{E}[g(X)]$, (b) $g(\mathbb{E}[X])$, (c) Var(g(X)) ve (d) g(Var(X))'i hesaplayınız:

1. Y = $X^{\frac{1}{4}}$, [0, 1]aralığında $f_y(y) = 4y^3$'tür, diğer durumlarda sıfırdır.

- 1'in Çözümü: 4 bileşen hesaplayacağız:

(a)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 y(4y^3)dy = (\tfrac{4}{5}y^5)_0^1 = \tfrac{4}{5} = 0.80$$ *ya da X'i kullanarak hesaplayabiliriz:*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 x^{\frac{1}{4}}dx = (\tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}})_0^1 = \tfrac{4}{5}.$$

(b)

$$g(\mathbb{E}[X]) = \left(\int_0^1 x dx\right)^{\frac{1}{4}} = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0.84$$

(c) Varyans (a)'daki sonucu kullanır

$$\begin{aligned}
Var(g(X)) &= \int_0^1 (y-\frac{4}{5})^2(4y^3)dy \\
&= 4\int_0^1 (y^5 - \frac{8}{5}\cdot y^4 + \frac{16}{25}\cdot y^3)dy \\
&= 4\left(\frac{1}{6}y^6 - \frac{8}{25}\cdot y^5 + \frac{4}{25}\cdot y^4\right)_0^1 \\
&= 4\left(\frac{1}{6} - \frac{8}{25} + \frac{4}{25}\right) = 4\left(\frac{25}{150} - \frac{24}{150}\right) \\
Var(g(X)) &= \frac{2}{75} = 0.02667
\end{aligned}$$

(d) İlk önce Var(X)'i hesaplamamız gerekiyor:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx \\
&= [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
Var(X) &= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Ve sonra dönüştürürüz:

$$g(Var(X)) = \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{12}} = 0.537$$

2. $Y = e^{-X}$, $[\frac{1}{e}, 1]$aralığında $f_y(y) = \frac{1}{Y}$'dır, diğer durumlarda sıfırdır.

- 2’nin Çözümü: 4 bileşen hesaplayacağız:

(a)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\frac{1}{e}}^{1} y(\tfrac{1}{y})dy = (y)_0^1 = 1 - \tfrac{1}{e} = 0.632 \text{ ya da X'i kullanarak hesaplayabiliriz:}$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 e^{-x}dx = (-e^{-x})_0^1 = -\tfrac{1}{e} + 1.$$

(b)

$$g(\mathbb{E}[X]) = e^{-\left(\int_0^1 x dx\right)} = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.607.$$

(c) Varyans (a)’daki sonucu kullanır, $\overline{y}$ = $\mathbb{E}$[Y] = 1 - $\frac{1}{e}$,

$$\begin{aligned}
Var(g(X)) &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (y-\bar{y})^2 \frac{1}{y} dy \\
&= \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(y - 2\bar{y} + \bar{y}^2 \cdot \frac{1}{y}\right) dy \\
&= \left(\frac{1}{2}y^2 - 2\bar{y}\cdot y + \bar{y}^2 \log y\right)_{\frac{1}{e}}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2} - 2\left(1-\frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{e^2} - 2\left(1-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{1}{e} - \left(1-\frac{1}{e}\right)^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{e} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2} + 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 - 4\frac{1}{e} + 3\frac{1}{e^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})(1-3\frac{1}{e}) \\
Var(g(X)) &= 0.033
\end{aligned}$$

(d) (a)’daki Var(x)’i kullanarak, Var(x) = 1/12, g(.)’yi uygula: g(Var(X)) = $e^{-\frac{1}{12}}$ = 0.920.

3. Y = 1 - e^{-X}, [0, 1- $\frac{1}{e}$] aralığında $f_y(y) = \frac{1}{1-Y}$’dir, diğer durumlarda sıfırdır.

3’ün Çözümü: 4 bileşen hesaplayacağız:

(a) Bu problem için biraz fazla cebirsel işlem yapacağız:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)] &= \int_0^{1-\frac{1}{e}} y\left(\frac{1}{1-y}\right)dy \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{1-y} + \frac{1-y}{1-y} - 1\right)dy \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} \left(\frac{1}{1-y} - 1\right)dy \\
&= (-\log(1-y) - y)_0^{1-\frac{1}{e}} \\
\mathbb{E}[g(X)] &= 1 - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = 0.368
\end{aligned}$$

ya da onu şöyle hesaplarız:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 (1 - e^{-x})dx = (x + e^{-x})_0^1 = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}$$

(b)

$$g(\mathbb{E}[X]) = 1 - e^{-\left(\int_0^1 x dx\right)} = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.393$$

(c) Varyans (a)’daki sonucu kullanır, $\overline{y} = \mathbb{E}[Y] = 1 - \frac{1}{e}$, bu varyansın bir belirleyeniyle birleştirilmiştir:

$$
\begin{aligned}
Var(g(X)) &= \mathbb{E}[g(X)^2] - \mathbb{E}[g(X)]^2 \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} y^2 \frac{1}{1-y} dy - \frac{1}{e^2} \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} y \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy - \frac{1}{e^2} \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} \left(\frac{y}{1-y} - y + \frac{1-y}{1-y} - 1\right) dy - \frac{1}{e^2} \\
&= \int_0^{1-\frac{1}{e}} \left(-y + \frac{1}{1-y} - 1\right) dy - \frac{1}{e^2} \\
&= \left(-\frac{1}{2}y^2 - \log(1-y) - y\right)_0^{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e^2} \\
Var(g(X)) &= 0.0328
\end{aligned}
$$

(e) (a)'daki Var(x)'i kullanarak, Var(x) = 1/12, g(.)'yi uygula: g(Var(X)) = 1- $e^{-\frac{1}{12}}$ = 0.080.

4. Yukarıdaki her bir dönüşüm için (a)$\mathbb{E}$*[g(X)]* nasıl (b) *g(*$\mathbb{E}$*[X])* ile ve (c) Var(g(X)) nasıl (d) g(Var(X)) ile karşılaştırılır? Not edilmesi gereken herhangi bir genelleme var mı? Açıklayınız.

- 4'ün Çözümü: Aşağıdaki tablo karşılaştırmayı verir:

	(a)	(b)	(c)	(d)
$X^{\frac{1}{4}}$	0.80	0.84	0.027	0.537
e^{-X}	0.632	0.607	0.033	0.920
$1-e^{-X}$	0.368	0.393	0.033	0.080

Bizim gördüğümüz $X^{\frac{1}{4}}$ ve 1 – e^{-X} gibi konkav fonksiyonların $\mathbb{E}$[g(X)] < g($\mathbb{E}$[X]) özelliğine ve konveks fonksiyonların ise $\mathbb{E}$[g(X)] > g($\mathbb{E}$[X]) özelliğine sahip olduğudur. Bu, doğrusal g(.) dışında, Jensen Eşitsizliğine bir örnektir, $\mathbb{E}$[g(X)] $\neq$ g($\mathbb{E}$[X]). Jensen Eşitsizliğinin bir uzantısı h(x) = $(g(x) - \mathbb{E}[g(X)])^2$'i tanımlamak ve g(.)'nin konkavlığına bağlı olarak, h(.)'nin konkav mı yoksa konveks mi olduğunu belirtmek olurdu. Basit bir türetme şu sonucu doğurur:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}h(x) &= 2(g(x)-\mathbb{E}[g(x)])g'(x)\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x) &= 2(\underbrace{g'(x)g'(x)}_{+}-\underbrace{\mathbb{E}[g(x)]}_{+/-}\underbrace{g''(x)}_{+/-}\end{aligned}$$

Dolaysıyla, esas itibariyle, konkavlık tamamen muğlaktır çünkü herhangi bir fonksiyon için pozitif veya negatif olabilen - $\mathbb{E}$[g(X)]'e bağlıdır. Bu nedenle, genel olarak, g(Var(X))'in Var(g(X)) ile nasıl karşılaştırılabileceği konusunda hiçbir şey söyleyemeyiz. Bunun istisnası, g(.) doğrusal olmadıkça, herhangi bir sapmaya işaret edemesek bile belki de onlar genel olarak birbirine eşit değildir. O zaman, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x)$ > 0 iken, ikinci terim sıfırlanacağı için, konveks fonksiyonunu garantilemiş oluruz.

Soru İki

Aşağıdaki her bir PDF için beklenen değer ve varyansı hesaplayınız.

1. $f_x(x) = ax^{a-1}$, 0 < x < 1, a > 0.

- 1'in Çözümü: İlk önce beklenen değeri hesaplayacağız:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x\cdot ax^{a-1}dx\\ &= \int_0^1 ax^a dx\\ &= \frac{a}{a+1}x^{a+1}|_0^1\\ \mathbb{E}[X] &= \frac{a}{a+1}\end{aligned}$$

Şimdi varyansı hesaplayabiliriz:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \int_0^1 x^2 \cdot ax^{a-1} dx - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \int_0^1 ax^{a+1} dx - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \frac{a}{a+2} x^{a+2} |_0^1 - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \\
&= \frac{a}{a+2} - \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \\
Var(X) &= \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}
\end{aligned}
$$

2. $f_x(x) = \frac{1}{n}$, x = 1, 2, …, n'dir ve n bir tam sayıdır.

- 2'nin Çözümü: Önce beklenen değeri hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} x \\
&= \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\
\mathbb{E}[X] &= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

Şimdi varyansı hesaplayabiliriz. Bunun için sonlu seri, $\sum_{x=1}^{N} x^2$'nin toplamını bilmemiz gerekiyor (bunu hesaplamanın çok sayıda zekice yollar vardır ancak isterseniz şurada bulabilirsiniz: http://en.wikipedia.org/wiki/List~of~mathematical~series).

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} x^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{3n+3}{12}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{1}{12}(n^2-1) \\
Var(X) &= \frac{1}{12}(n^2-1)
\end{aligned}
$$

3. $f_X(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2,\ 0 < x < 2$

- 3'ün Çözümü: Önce beklenen değeri hesaplayalım:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^2 x \cdot \frac{3}{2}(x-1)^2 dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\
&= \frac{3}{2}(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)_0^2 \\
&= \frac{3}{2}(\frac{1}{4}16 - \frac{2}{3}8 + \frac{1}{2}4) \\
\mathbb{E}[X] &= 1
\end{aligned}
$$

Şimdi varyansı hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{2}(x-1)^2 dx - 1 \\ &= \frac{3}{2}\int_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx - 1 \\ &= \frac{3}{2}(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3)_0^2 - 1 \\ &= \frac{3}{2}(\frac{1}{5}32 - \frac{1}{2}16 + \frac{1}{3}8) - 1 \\ Var(X) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Soru Üç

Varsayalım ki X, Y ve Z bağımsızdır ve ortalaması sıfır, varyansı bir olan aynı dağılımlıdır. Aşağıdakileri hesaplayınız:

1. $\mathbb{E}[3X + 2Y + Z]$
2. $Var[5X - 3Y - 2Z]$
3. $Cov[X - Y + 4, 2X + 3Y + Z]$
4. $E[3XY]$

- 1'in Çözümü:

$$\mathbb{E}[3X + 2Y + Z] = 3\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

- 2'nin Çözümü:

$$\begin{aligned}
Var[5X-3Y-2Z] &= Var(5X)+Var(-3Y)+Var(-2Z)\\
&= 25Var(X)+9Var(Y)+4Var(Z)\\
&= 25\cdot 1+9\cdot 1+4\cdot 1\\
Var[5X-3Y-2Z] &= 38
\end{aligned}$$

- 3’ün Çözümü:

$$\begin{aligned}
Cov[X-Y+4,2X+3Y+Z] &= Cov[X-Y,2X+3Y+Z]\\
&= Cov[X,2X]+Cov(X,3Y)+Cov(X,Z)\\
&\quad +Cov(-Y,2X)+Cov(-Y,3Y)+Cov(-Y,Z)\\
&= 2Var(X)+3\cdot Cov(X,Y)+Cov(X,Z)\\
&\quad -2\cdot Cov(Y,X)-3\cdot Var(Y)-Cov(Y,Z)\\
&= 2\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 0-2\cdot 0-3\cdot 1-1\cdot 0\\
Cov[X-Y+4,2X+3Y+Z] &= -1
\end{aligned}$$

- 4’ün Çözümü:

$$\begin{aligned}
E[3XY] &= \int_{x\in X}\int_{y\in Y} 3xyf(x,y)dydx\\
&= 3\int_{x\in X}\int_{y\in Y} xyf_X(x)f_Y(y)dydx\\
&= 3\int_{x\in X} xf_X(x)dx\int_{y\in Y} yf_Y(y)dy\\
&= 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=3\cdot 0\cdot 0\\
E[3XY] &= 0
\end{aligned}$$

Soru Dört

Rasgele değişkenler X ve Y ile sabit sayılar olan a, b $\in \mathbb{R}$ için aşağıdaki ifadeleri basitleştiriniz.

1. $Var(aX + b)$
2. $Cov(aX + c, bY + d)$
3. $Var(aX + bY)$

- 1'in Çözümü:

$$Var(aX + b) = Var(aX) = a^2 Var(X)$$

- 2'nin Çözümü:

$$Cov(aX + c, bY + d) = Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

- 3'ün Çözümü:

$$\begin{aligned} Var(aX + bY) &= Var(aX) + Var(bY) + 2Cov(aX, bY) \\ &= a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y) \end{aligned}$$

Soru Beş

(Bain/Engelhardt, s. 190)

Varsayalım ki bileşik PDF'si $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ durumlarında $f(x, y) = 4(x - xy)$, diğer durumlarda sıfır olan X ve Y sürekli rasgele değişkenlerdir.

1. $\mathbb{E}[X^2Y]$'yi bulunuz.

- 1'in Çözümü:

Eğer dikkatli bir şekilde bakarsak, $\mathbb{E}[X]$ ve $\mathbb{E}[Y]$'nin ne olduğunu görebiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 4(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})=\frac{2}{3}\\
\mathbb{E}[Y] &= 4(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Bunu daha sonra kullanacağız.

3. $Var(X-Y)$'yi bulunuz.

3'ün Çözümü:

$$\begin{aligned}
Var(X-Y) &= \mathbb{E}[(X-Y)^2]-\mathbb{E}[X-Y]^2\\
&= \int_0^1\int_0^1 (x-y)^2\cdot 4(x-xy)dydx-\frac{1}{9}\\
&= \int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)\cdot 4(x-xy)dydx-\frac{1}{9}\\
&= 4\int_0^1\int_0^1 (x^3-x^3y-2x^2y+2x^2y^2+xy^2-xy^3)dydx-\frac{1}{9}\\
&= 4\int_0^1 (x^3y-\frac{1}{2}x^3y^2-x^2y^2+\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{1}{3}xy^3-\frac{1}{4}xy^4)_0^1dx-\frac{1}{9}\\
&= 4\int_0^1 (x^3-\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x)dx-\frac{1}{9}\\
&= 4(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{8}x^2)_0^1-\frac{1}{9}\\
&= 4(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8})-\frac{1}{9}\\
Var(X-Y) &= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Eğer yine dikkatli bir şekilde cebirsel işlemlere bakarsak, $\mathbb{E}[X^2]$ $\mathbb{E}[Y^2]$ $\mathbb{E}[XY]$'i hesapladığımızı göreceksiniz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{6}\\ \mathbb{E}[XY] &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

4. X ve Y'nin korelasyon katsayısının değeri, $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$, nedir?

- 4'ün Çözümü: Korelasyon katsayısının her üç parçasını da hesaplamamız gerekiyor. Yukarıda elde edilen momentleri kullanarak, Kovaryans ile başlayacağız:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\\ &= \frac{2}{9} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\\ Cov(X,Y) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\\ Var(X) &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(Y) &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2\\ &= \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\\ Var(Y) &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

Şimdi ise sonuç yeterince açıktır,

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}}} = 0$$

X ile Y'nin dikdörtgen desteği ile birlikte PDF'nin faktörlere ayrılma yeteneğine (f(x,y) = 4(x – xy)'in faktörleri $f_X(x) = 2x$ ve $f_Y(y) = 2(1-y)$'dir) dikkat edenler, X ile Y'nin bağımsız olduğunu hemen fark etmişlerdir. Bunun anlamı korelasyon katsayısının sıfır olması gerektiğidir çünkü iki bağımsız rasgele değişken için Kovaryans sıfırdır.

5. $\mathbb{E}[Y|x]$'in değeri nedir?

5'in Çözümü: $\mathbb{E}[Y|x]$'i elde etmek için, bir doğrusal yoğunluk için kovaryansın sıfır olduğu gerçeğinden hareketle yukarıda tahmin ettiğimiz X'in marjinalini kullanarak koşullu yoğunluğu hesaplamamız gerekiyor (sıfır korelasyon bağımsızlık anlamına gelmez. Açıkça bağımsız olmayan X ve $Y = X^2$ için [-1, 1] aralığında bir uniform dağılım düşünün, onların kovaryansı gerçekte sıfırdır):

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{4x(1-y)}{2x} = 2(1-y)$$

Fakat X ve Y bağımsız oldukları için, $f(y|x) = f_Y(y)$'nin anlamı : $\mathbb{E}[Y|x] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$'tür.

Soru Altı

X ile Y'nin bileşik PDF'si $0 < x < y < \infty$ için $f(x,y) = e^{-y}$, diğer durumlarda sıfır olsun. $\mathbb{E}[X|y]$'yi bulunuz.

- Çözüm: Bu tarz soruları daha önce görmüştük. Yapmamız gereken şey $Y = y$'ye koşullanmış X'in dağılımını elde edip böylece onun beklenen değerini hesaplamaktır. Bunun için ilk önce Y'nin marjinal dağılımına ihtiyacımız var. Şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y e^{-y}dx \\ &= xe^{-y}|_0^y \\ f_Y(y) &= ye^{-y} \end{aligned}$$

Sonra bunu X|y'nin formülünde yerine koyarız:

$$f(X|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}$$

Bununla şimdi koşullu beklenen değeri hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|y] &= \int_0^y \frac{1}{y}xdx \\ &= \frac{1}{y}\frac{1}{2}x^2|_{x=0}^{x=y} \\ \mathbb{E}[X|y] &= \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Soru yedi

(Bain/Engelhardt, s. 190)

X (a,b) aralığında tanımlanmış bir uniform, yani f(x) = $\frac{1}{b-a}$, dağılımlı rasgele değişken olsun. X'in *k*.ncı merkezi momentini, μ_k = $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$, olarak tanımlayınız. Standart merkezi momenti $\frac{\mu_k}{(\mu_2)^{\frac{k}{2}}}$ olarak tanımlanır. X'in *k*.ncı standart merkez momenti için bir ifade bulunuz.

- Çözüm: Yapmamız gereken, sadece ikinci merkezi moment için (varyans) bir ifade geliştirmek ve sonra formülü k.nci momente genelleştirmek ve sonra formülünü bileşenlerinde yerine koymaktır. Uniform dağılım için beklenen değer desteğin, $\mathbb{E}$[X] = (b+a)/2, bitiş noktalarının ortasıdır:

$$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^k dx$$

Bunu k = 2 için kolayca çözebiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x^2-(b+a)+\frac{(b+a)^2}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{(b+a)}{2}x^2+\frac{(b+a)^2}{4}x\right)_a^b \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{(b+a)}{2}(b^2-a^2)+\frac{(b+a)^2}{4}(b-a)\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)-\frac{(b+a)^2}{4}(b-a)\right) \\
&= \frac{1}{3}b^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}2ab-\frac{1}{4}a^2 \\
&= \frac{1}{12}b^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{12}a^2 \\
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] &= \frac{1}{12}(b-a)^2
\end{aligned}$$

Gözlemleyebilen okuyucu yukarıdaki ifadeyi açıp ve sonra faktörüne ayırarak büyük bir belanın içine girdiğimizi görecektir. K.nci momenti elde etmek için şimdi yapmamız gereken değişken değiştirmedir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^k dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} z^k dz \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{1}{k+1} z^{k+1}\Big|_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{1}{k+1}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}\left[(b-a)^k+(a-b)^k\right] \\
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k] &= \left(1+(-1)^k\right)\frac{(b-a)^k}{2^{k+1}(k+1)}
\end{aligned}$$

Bu esas itibariyle ikinci momenti elde etmeye göre daha kolaydı. k = 2 için olan formülümüzün hızlı kontrolü, doğru yolda olduğumuzu gösterir:

$$\frac{2(b-a)^2}{2^3\cdot 3} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Şimdi aşağıdaki formülü uyguluyoruz:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu_k}{(\mu_2)^{\frac{k}{2}}} &= \frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^k]}{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]^{\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{\left(1+(-1)^k\right)\frac{(b-a)^k}{2^{k+1}(k+1)}}{\left(\frac{(b-a)^2}{12}\right)^{\frac{k}{2}}} \\
&= \frac{\left(1+(-1)^k\right)\frac{(b-a)^k}{2^{k+1}(k+1)}}{\frac{(b-a)^k}{2^k\left(\sqrt{3}\right)^k}} \\
\frac{\mu_k}{(\mu_2)^{\frac{k}{2}}} &= \left(1+(-1)^k\right)\frac{\left(\sqrt{3}\right)^k}{2(k+1)}
\end{aligned}
$$

Şimdi uniform dağılımın k.nci standardize edilmiş merkez momenti için formülümüz var. Uniform dağılmış bazı rasgele sayılar türetin ve formülü kontrol edin!