14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Problem Seti 8 - Çözümler
14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Konrad Menzel

Son Gün: 28 Nisan 2009

Soru Bir: Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi

Bu dersten öğreneceğiniz iki önemli kavram büyük ihtimalle Büyük Sayılar Kanunu ve Merkezi Limit Teoremi ile bu iki kavramın etrafımızdaki dünyayı anlamamız için ortalamalar kullanmamıza nasıl olanak verdikleridir.

1. Büyük Sayılar Kanunu'nu belirtiniz (lütfen sadece ders notlarından kopyalayınız).
   - 1'in Çözümü: Varsayalım ki bütün i değerleri için $X_1, \ldots, X_n$ $\mathbb{E}[X] = \mu$ ve $Var(Xi) = \sigma^2 < \infty$'lu ardışık i.i.d. çekiliştir. O zaman $\epsilon > 0$ (normalde küçük bir sayıdır) aşağıdaki örneklem ortalamasını sağlar:

$$\lim_{n} P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

   Olasılık açısından $\overline{X}_n$'in μ'ye yakınsadığını söyleriz.

2. Büyük Sayılar Kanunu'nun ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir X rasgele değişkenin i.i.d. örnekleminin ortalaması hakkında bize ne söylediğini açıklayınız.
   - 2'nin Çözümü: Büyük sayılar kanunu bize bir rasgele değişken X'in i.i.d. örnekleminin ortalamasının yoğunluğunun yarı çapı ε olan bir "epsilon topu"nun içine yoğunlaştığını söyler. Ya da, ayrıntı vermek gerekirse, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, eğer bir rasgele değişkenin sonsuz örneklemini alırsak, onun ortalamasının yoğunluğu μ'nun etrafında birikecektir.

Varsayalım ki Nisan 2009 boyunca Cambridge'de yaşayanların işsizlik oranını bilmek istiyorsun. İşsiz "16 yaşında ve daha büyük referans haftasında çalışmayan, geçici hastalıklar dışında çalışmaya müsait, ve referans haftasıyla biten son dört haftada iş bulmak için çaba göstermiş kişidir. İşten kovulan ancak kovulduğu yerden geri çağırılmayı beklediği için iş aramak gereğini duymayan kişiler de işsiz olarak sınıflandırılır." (kaynak: http://www.econmodel.com/classic/terms/ur.htm).

Varsayalım ki telefon görüşmesiyle rasgele değişken X = 1 (*çalışan*) için bir örneklem oluşturdunuz, burada 1(.) bir kişinin çalıştığını ifade eder.

1. İşsizlerin toplam işgücüne bölümü olan işsizlik oranının, α, bir tahmin edicisini, $\hat{\alpha}$, yazınız. Bir Bernoulli rasgele değişkeni için tahmin ediciniz bir Momentler Yöntemi tahmin edicisi mi?
   - 1'in Çözümü: Tahmin edici seçimi $\hat{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ olacaktır. Bu tahmin edici bir Momentler Yöntemi tahmin edicisidir. Bu tahmin edici sadece 1 ile 0 değerlerini alan bir Bernoulli rasgele değişkeni olan Xi'nin dağılımının ortalamasını kullanır.

2. Tahmin edicinizin tutarlı olabilmesi için X ile ilgili yerine gelmesi gerekli koşulları (en az üç) ifade eden tahmin ediciye Büyük Sayılar Kanunun nasıl uygulanacağını açıklayınız(yukarıda ders notlarından kopyaladığınız Büyük Sayılar Kanunu'nu ile).
   - 2'nin Çözümü: Bu bir ortalama olduğu için, büyük sayılar kanunu bu tahmin ediciye uygulanır. Başka bir ifadeyle, daha çok kişi ile anket görüşmesi yaptıkça, tahmin edicimiz, $\hat{\alpha} \to^{p} \alpha$ olur, burada α gerçek işsizlik oranıdır. Örneklem için üç koşulumuz vardır: (1) i.i.d. rasgele değişkenler yığını, (2) sonlu ortalama, ve (3) sonlu varyans.

3. Yazdığınız her bir koşul için, işsizlik oranı için ortaya koyduğunuz varsayımların geçerliliği için yorum yapınız.
   - 3'ün Çözümü: Koşul (1):Örneklemimizin i.i.d.'liği telefonla yapılan anket çalışmasıyla uygulanabilir. Ancak, eğer sadece gece yarısı Kızılay'da yürüyen insanlardan "kolay bir örneklem" seçersek, büyük ihtimalle kitleyi temsil eden bir örneklemimiz olmayacaktır (yani, örneğimiz bağımsız veya benzer dağılımlı olmayacaktır).

     Koşul (2): Sonlu ortalama koşulu, rasgele değişkenin 0 ve 1 ile sınırlandırılmış olması ile sağlama alınmış olur.

     Koşul (3): Bir Bernoulli rasgele değişkeni p(1-p) varyansına sahip olduğu için, sonlu varyans koşulu benzer şekilde sağlama alınmış oluyor. Burada p 1 olma olasılığıdır ve rasgele Bernoulli değişkeni 0 ve 1 ile sınırlandırılmıştır.

Şimdi Merkezi Limit Teoremine daha yakından bakacağız.

1. Merkezi Limit Teoremini belirtiniz (lütfen sadece ders notlarından kopyalayınız).
   - 1'in Çözümü: Varsayalım ki $X_1, \ldots, X_n$ ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 < \infty$ olan bir dağılımdan elde edilen n büyüklüğünde bir rasgele örneklemdir. O zaman herhangi bir sabit x için:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$$

$\sqrt{n}\,\bar{X}_n$'nin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir Normal'e dağılımda yakınsadığını (bazıları buna kanunda yakınsam der) söyleyebiliriz. Sembolik olarak

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \to^d N(0, \sigma^2)$$

2. Merkezi Limit Teoreminin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan bir X rasgele değişkenin i.i.d. (bağımsız, benzer dağılımlı) örnekleminin ortalaması hakkında bize ne söylediğini açıklayınız.
   - 2'nin Çözümü: Merkezi Limit Teoremi bize bir i.i.d. rasgele örneklemin ortalamasının dağılımda Normale yakınsadığını söyler. Bunun anlamı, X'in dağılımının ne olduğuna bakmanda, onun ortalamasını Normal Dağılımın ortalaması ile karşılaştırabiliriz demektir.

3. Tahmin edicinizin asimptotik olarak normal dağılımlı olması için işsizlik oranı için yazdığınız tahmin edici ile ilgili yerine gelmesi gerekli koşulları (en az üç) ifade eden tahmin ediciye Merkezi Limit Teoreminin nasıl uygulanacağını açıklayınız. Bu koşullar Büyük Sayılar Kanunu'nun uygulanması için gerekli olanlardan farklı mıdır?
   - 3'ün Çözümü: İşsizlik oranı bir kişinin çalışıp çalışamamasının rasgele bir Bernoulli değişkeninin rasgele örnekleminin ortalamasının bir tahmin edicisi olduğu için, dağılımının Normal olacağını biliriz. Üç gerekli koşulu Büyük Sayılar Kanununkiler gibidir: (1) i.i.d. rasgele örneklem, (2) sonlu ortalama, ve (3) sonlu varyans.

4. N → ∞ iken tahmin edicinizin yakınsadığı dağılımı yazınız. Burada N anket çalışması uyguladığınız kişi sayısıdır.
   - 4'ün Çözümü: Şunu yazarız:

$$\sqrt{N}(\hat{\alpha} - \alpha) \to^d N(0, \alpha(1-\alpha)).$$

5. X'in varyansı için bir tahmin edici yazınız. Tahmin edicinin tutarlı olabilmesi için rasgele değişken Y = X^2 için gerekli olan varsayımlar hakkında yorum yapınız.
   - 5'in Çözümü: X'in varyansının bir tahmin edicisi birinci ve ikinci merkezi olmayan momentler için iki Momentler Yöntemi tahmin edicisini kullanarak bir tahmin edici oluşturmak için Varyans denkliğini, $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, kullanmak olurdu

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2$$

Benzer şekilde, işsizlik oranının tahmin edicisinden yararlanarak varyans benzeri örneklemi kullanabilirdik ve şunu yazardık:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{\alpha})^2$$

Bu iki tahmin ediciden herhangi birisi için, X sınırlı olduğundan bu örnek için tamamen uygun olan $\mathbb{E}[X^2]$'e ihtiyacımız var. Ancak, aynı zamanda sınırlama için varyansın varyansına ihtiyacımız var:

$$Var((X-\alpha)^2) = \mathbb{E}[(X-\alpha)^4] - \mathbb{E}[(X-\alpha)^2]^2 < \infty$$

Bunun sağlanması için yeterli tek koşul $\mathbb{E}[X^4] < \infty$'dur. Bernoulli rasgele değişken için hoş olan şey, bütün $k \geq 1$ için $0 \leq \mathbb{E}[X^{k+1}] = \mathbb{E}[X^k] \leq 1$'dir. Bu nedenle, genel olarak, Bernoulli rasgele değişkenin bütün momentlerini kolayca sınırlayabiliriz.

6. Şimdi, X'in bir Bernoulli rasgele değişkeni olduğu gerçeğini kullanarak, X'in varyansının farklı bir tahmin edicisini momentler yöntemi tahmin edicisi olarak yazabilirsiniz (yani işsizlik oranınızın tutarlı bir tahmin edicisinin fonksiyonu gibi). Formüller farklı görünmesine rağmen, bu iki tahmin edici sayısal olarak aynı mıdır? Büyük Sayılar Kanununu uygulamak için yapılan varsayımların aynısını tutmaya gerek var mı?

- 6’nın Çözümü: X bir rasgele Bernoulli değişkeni olduğu için, kolayca varyansının p(1-p) olduğunu hatırlayabiliriz. Burada p rasgele bir değişken için başarı veya 1 çekme olasılığıdır. Farklı bir tahmin edici şöyle olabilirdi:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \hat{\alpha}(1-\hat{\alpha}) \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(1-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \\
\tilde{\sigma}^2 &= \hat{\sigma}^2
\end{aligned}
$$

Bernoulli rasgele değişkeni için, iki tahmin edici gerçekte sayısal olarak aynıdır. Ancak, dördüncü denklemde bir Bernoulli değişkeni (yani $1^2 = 1$ ve $0^2 = 0$) için $X^2 = X$ kullandığımızdan, benzer bir şekilde Momentlerin Yönteminden Maksimum Olabilirlik Tahmin Edicileri oluştursak bile, bu sonuç genel olarak diğer rasgele değişkenler için elde edilmez. Beklenmesi gerektiği gibi, iki tahmin edici sayısal olarak benzer oldukları için, Büyük Sayılar Kanununun uygulanabilmesi için kesinlikle aynı varsayımların sağlanması gerekir.

7. Ortalama işsizlik oranınızın tahmin edicisi ile X’in varyansını kullanarak: Eğer tahmin edicinizin %95 olasılıkla μ’nun 0.002 (yani % 0.2 işsizlik oranı) kadar etrafında olmasını arzuluyorsanız, kaç kişiyi aramanız gerekir? (İşsizlik Şubattan Marta 8.1’den 8.5’e yükseldiği için, Nisan için beklentinizin 8.7’ye bir artış şeklinde olduğunu varsayın).
   - 7’nin Çözümü: Merkezi Limit Teoremini uygulamak için zorunlu koşulları açık bir şekilde belirttiğimiz son problem setinde yaptığımız gibi bu sadece benzer bir güç hesaplamasıdır (bunun sadece bir uygulama olduğunun farkında olmalısınız) .

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma} \le x\right) &= \Phi(x) \\
P\left(\sqrt{n}\frac{|\bar{X}_n-\mu|}{\sigma} \le x\right) &\approx \Phi(x)-\Phi(-x)
\end{aligned}
$$

$\hat{\alpha}$ ‘in sadece bir ortalama olduğunun farkına varınca, uygun bileşenleri yukarıdaki Merkezi Limit Teoremin tahmininde yerine koyarız ve tahmin ediciler şöyle olur:

$$
\begin{aligned}
P\left(|\hat{\alpha}-\alpha| < 0.002\right) &= 0.95 \\
P\left(\sqrt{N}\frac{|\hat{\alpha}-\alpha|}{\sqrt{\bar{\sigma}^2}} < \sqrt{N}\frac{0.002}{\sqrt{\bar{\sigma}^2}}\right) &= 0.95 \\
P\left(\sqrt{N}\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}} < -\sqrt{N}\frac{0.002}{\sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}}\right) &= 0.025 \\
\Phi\left(-\sqrt{N}\frac{0.002}{\sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}}\right) &= 0.025 \\
-\sqrt{N}\frac{0.002}{\sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}} &= \Phi^{-1}(0.025) = -1.96 \\
N &= \left\lceil\left(\frac{1.96}{0.002}\sqrt{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}\right)^2\right\rceil
\end{aligned}
$$

burada varyansı tahmin etmek için, bu ayki işsizlik oranının beklenen değerini, $\mathbb{E}[\hat{\alpha}] = 0.078$, kullanmamız gerekir. Ayrı bir seçenek olarak, varyansı tahmin etmek için, Mart ayının işsizlik oranını (% 8.5) kullanabilirdik. İkisini de kullanıp, örneklem büyüklüğünün nasıl farklılaştığına bakacağız:

$$
\begin{aligned}
N &= \left\lceil\left(\frac{1.96}{0.002}\sqrt{0.087(1-0.087}\right)^2\right\rceil = 76286 \\
N &= \left\lceil\left(\frac{1.96}{0.002}\sqrt{0.085(1-0.085)}\right)^2\right\rceil = 74696
\end{aligned}
$$

İşsizliği ölçen Current Population Survey (CPS)'nin her ay yeterince büyük örneklem kullanıp kullanmadığını anlamak için, web sayfalarını inceledim: "Her ay, 2200 çok iyi eğitilmiş Census Bureau çalışanı 60000 örnek hane halkı üyesi ile işgücü aktiviteleri (çalışma veya iş arama) ve araştırma haftası (genellikle ayın 12'sini içeren hafta) boyunca üyelerin işgücü ile alakasız durumları ile ilgili olarak yüz yüze görüşme yapar"(kaynak: http://www.bls.gov/cps/cps~htgm.htm). Böylece, 60000 hane halkı ile, aylık işsizlik istatistiklerinde düşük hata payını gerçekleştirmek için, CPS'nin işgücünde yer alan 75000'den fazla kişinin çalışma durumu hakkında bilgi edinmesi olasıdır. Ancak, alt-nüfus grupları hakkında bir şey söyleyebilmek için bazı demografikler için örneklemi fazla aldıklarından, genel işsizlik oranını doğru tahmin edebilmek için daha fazla hane halkına gitmeleri de gerekebilir.

Ancak, işsizliğin %5 etrafında oynadığı normal ekonomik koşullarda, %0.2 gibi bir hata payının sadece 45619'luk bir örneklem gerektirdiğini not ediniz. Bu nedenle, aynı seviyedeki işsizlik oranının doğruluğu daha yüksek bir örneklem gerektirdiği için (bir Bernoulli rasgele değişkenin maksimize olduğu işsizliğin %50'sine kadar), yüksek işsizlik oranı CPS'nin doğru tahminini zorlaştırır.

Böylece, ne zaman işsizlik oranını analizlerde kullanırsanız, bunların hatalı ölçüldüğünü hatırlamalısınız! Gerçek işsizlik oranını bilmiyoruz, fakat onu kabul edilebilir bir hata payıyla(%0.2) biliyoruz! Bunun anlamı, Nisan aynında 75000 kişilik örneklememizle işsizlik oranını %8.7 olarak tahmin etsek bile, hiçbir zaman işsizlik oranının %8.5'ten (yaklaşık olarak %0.2 hata payı ile) %8.7'ye (yine yaklaşık olarak %0.2'lik hata payı ile) çıktığından kesin emin olamayız. İşte! istatistiği anlamak budur! :)

Soru İki: Sapmasızlığa karşı Tutarlılık

Birincisi, sapmasızlık ve tutarlılık arasındaki fark nedir? İkincisi, örneklem ortalaması $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$'nin i.i.d. rasgele değişkenleri, X_1, …X_n' in N büyüklüğündeki örnekleminin sapmasız bir tahmin edicisi olduğunu ispat ediniz, burada $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Üçüncüsü, ilave bir varsayım altında örneklem ortalamasının μ'nun tutarlı bir tahmin edicisi olduğunu gösteriniz ve yapmaya ihtiyaç duyduğunuz varsayımı belirtiniz.

- Çözüm: Notlarda şöyle yazıyor, "Eğer bütün θ_0 için $\mathbb{E}_{\theta_0}[\hat{\theta}] = \theta_0$ ise, bir $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ tahmin edicisi θ için sapmasızdır". Tutarlılık tanımıda şöyledir: "Eğer, bütün $\epsilon > 0$ için, n'i arttırırken, tahmin edici olasılıkta θ_0'a yakınsarsa, bir $X_1, \ldots, X_n$ örneklemi için $\hat{\theta}$'nın θ için tutarlı bir tahmin edici olduğunu söyleriz",

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}\left(\left|\hat{\theta}(X_1, ..., X_n) - \theta_0\right| < \epsilon\right) = 1$$

(bu bütün θ_0 için geçerlidir).

Bu suretle, sapmasızlık bir tahmin edicinin ortalamasının (beklenen değerinin) gerçek parametreye eşit olduğunu söyleyen bir sonlu-örneklem argümanıdır. Diğer taraftan, tutarlılık için sonlu örneklem gerekli olmamasına rağmen, tutarlılık bazen "asimptotik sapmasızlık" olarak anılır. Diğer bir ifade ile eğer $n \to \infty$ ise, bütün sapma sıfıra gider. Ortalamanın sapmasız olduğunu ispatlamak tekrar tekrar yaptığımız bir şeydir:

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]\right) = \frac{1}{n}n\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i] = \mu$$

$\overline{X}_n \to^p \mu$ 'i göstermek sadece Büyük Sayılar Kanununu uygulamayı gerektirir. Tek gerekli ilave varsayım $Var(X) = \sigma^2 < \infty$'dur. Büyük Sayılar Kanununu kullanınca şunu elde ederiz: bütün $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_\mu\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \epsilon\right) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} P_\mu\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| < \epsilon\right) &= 1 \end{aligned}$$

Bu bize örneklem ortalaması $\overline{X}_n$'in tutarlılığını verir.

Soru Üç: Kavram Kargaşalığından Kaçınmak

Anlam belirsizliklerinden ve benzer kavramların kullanımından kaçınmak için:

1. "İstatistik" kavramını tanımlayınız. İstatistik rasgele bir değişken midir?
   - 1'in Çözümü: Bir istatistik bir örneklemin(data), $X_1, \ldots, X_n$, fonksiyonudur. Ve bir rasgele değişkenin fonksiyonu aynı zamanda bir rasgele değişkendir.

2. "Tahmin edici" kavramını tanımlayınız. Bir tahmin edici rasgele değişken midir? Bir tahmin edici ile bir istatistik arasındaki fark nedir? Ya da bu soru anlamlı mı?
   - 2'nin Çözümü: θ'ın tahmin edicisi $\hat{\theta}$ bir istatistiktir, bir $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ (yani $X_1, \ldots, X_n$'in bir fonksiyonudur). Bir tahmin edici aynı zamanda rasgele bir değişken olan bir istatistik olduğu için, bir rasgele değişkendir. Dahası, bir

tahmin edici tahmin etmeye çalıştığı özel bir kitle parametresine sahip bir istatistiktir. Böylece, her ne kadar ekonomi dışında ikisi dönüşümlü olarak kullanılıyorsa da, ikisi arasında bir fark vardır.

3. Bir tahmin edicinin "gerçekleşmesi" kavramını tanımlayınız.
   - 3'ün Çözümü: Bir tahmin edicinin gerçekleşmesi bir gerçekleşmiş örneklemi kullanarak bir tahmin edicinin hesaplanmasıdır (ya da rasgele bir örneklemden, X_1, …, X_n, elde edilen çekilişler yığınıdır). Bu tahmin olarak adlandırılır.

4. "Tahmin" kavramını tanımlayınız.
   - 4'ün Çözümü: Tahmin bir tahmin edicinin gerçekleşmesidir (gerçekleşmiş bir örneklemin fonksiyonu).

5. Bir rasgele değişken X'in "standart sapma"sını tanımlayınız.
   - 5'in Çözümü: Bir rasgele değişkenin standart sapması $\sqrt{Var(X)}$'tir.

6. Bir tahmin edici $\hat{\theta}$(X)'in "standart hata"sını tanımlayınız.
   - 6'nın Çözümü: Bir tahmin edicinin standart hatası tahmin edicinin standart sapmasıdır: $\sqrt{Var(\hat{\theta}(X))}$. Bu nedenle, standart hatayı rasgele bir değişkenin (tahmin edici), $\hat{\theta}$(X), standart sapması olarak düşünebiliriz.

Soru Dört: Delta Yöntemi

Standart hata tahmin edicisi $\hat{\theta}_Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^2$ için standardize edilmiş basıklığı $\mathbb{E}[Z^4] = \delta^4$ olan bir standart rasgele değişken belirleyiniz. N'nin "büyük" olduğunu varsayalım. (İpucu: $\hat{\theta}_Z$'in asimptotik dağılımı nedir?)

- Çözüm: $\hat{\theta}_Z$ tahmin edicinin standart hatası sadece standart sapmadır, fakat ilk önce varyansı türetmek gerekir:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\theta}_Z\right) &= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^2\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var\left(Z_i^2\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left(Z_i^4\right) - \mathbb{E}\left(Z_i^2\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} \delta^4 - 1^2 \\
Var\left(\hat{\theta}_Z\right) &= \frac{\delta^4 - 1}{N}
\end{aligned}
$$

Bu bize $\sqrt{Var(\hat{\theta}_Z)} = \sqrt{\frac{\delta^4-1}{N}}$'in standart hatasını verir. Ve $\hat{\theta}_Z$ sadece bir ortalama olduğu için, $\hat{\theta}_Z$ Normal dağılımlıdır.

Şimdi de, $\mathbb{E}$[X]) = μ, Var(X) = σ^2 ve standart basıklığı $\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4\,]}{\sigma^4}$ = δ^4 olan bir rasgele değişken X için standart hata tahmin edicisi $\hat{\theta}_X$ = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu\,)^2$ elde etmek için değişken değiştirmeyi uygulayınız.

- Çözüm: $\hat{\theta}_X$'in standart hatasını elde etmek kolaydır. X sadece Z'nin konum-ölçek dönüşümü olduğu için, sadece ters dönüşüm σZ + μ = X'i kullanmalıyız. Bu bize $\sigma^2\hat{\theta}_Z = \hat{\theta}_X$ dönüşümünü verir.

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_Z &\sim N\left(1, \frac{\delta^4 - 1}{N}\right) \\
\hat{\theta}_X &\sim N\left(\sigma^2, \sigma^4\frac{\delta^4 - 1}{N}\right)
\end{aligned}
$$

Bunu daha detaylı bir şekilde doğrulamak istiyoruz:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\theta}_X\right) &= Var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2\right)\\
&= Var\left(\frac{\sigma^2}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\\
&= \sigma^4 Var\left(\hat{\theta}_Z\right)\\
Var\left(\hat{\theta}_X\right) &= \sigma^4\frac{\delta^4-1}{N}
\end{aligned}
$$

Böylece, standart hata:

$$\sqrt{Var\left(\hat{\theta}_X\right)} = \sigma^2\sqrt{\frac{\delta^4-1}{N}}$$

Normal dağılımlı rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin dağılımlarını elde etmenin daha genel versiyonuna Delta Yöntemi adı verilir: Wikipedia: Delta Yöntemi. Ancak, bu tek değişkenli basit dönüşüm için, sadece rasgele değişkenlerin dönüşümü için halı hazırda öğrendiğiniz yöntemleri kullanabilirsiniz.

Soru 5: Maksimum Olabilirlik Tahmin Edicisi

Maksimum olabilirlik tahmin edicileri ekonomide çok yaygın olarak kullanılırlar.

1. İ.i.d. Poisson rasgele değişkenleri, X_1, …X_n' in N büyüklüğündeki bir örnekleminin olabilirlik fonksiyonunu belirtiniz.
   - 1'in Çözümü: Elimizde f(x_1, …, x_n) = $\prod_{i=1}^{N} f(x_i)$ gibi bir bileşik yoğunluk fonksiyonu var, burada f(x_i) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$'tir. Olabilirlik fonksiyonu tam olarak bu yoğunluk fonksiyonudur:

$$L(\lambda|x_1,...,x_N) = \prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

2. Log-Olabilirlik fonksiyonunu belirtiniz ve basitleştiriniz.
   - 2'nin Çözümü: Log-olabilirlik fonksiyonu basitçe yoğunluk fonksiyonunun logudur:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda|x_1,\ldots,x_N) &= \log\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\log\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}-\lambda+x_i\log(\lambda)-\log(x_i!)\\
&= -N\lambda+\log(\lambda)\sum_{i=1}^{N}x_i-\sum_{i=1}^{N}\log(x_i!)
\end{aligned}
$$

3. Birinci sıra koşulunu alınız ve λ'nın maksimum tahmin edicisi için çözünüz.
   - 3'ün Çözümü: Log-olabilirlik fonksiyonun türevini alıyoruz:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}(\lambda|x)}{\partial\lambda} &= -N\lambda+\log(\lambda)\sum_{i=1}^{N}x_i-\sum_{i=1}^{N}\log(x_i!)\\
0 &= -N+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}x_i-0\\
\hat{\lambda} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i
\end{aligned}
$$

4. (3)'teki Maksimum Olabilirlik tahmin edici (MLE) dersteki Momentler Yöntemi (MoM) tahmin edicisiyle nasıl karşılaştırılır.
   - 4'ün Çözümü: Derslerdeki Momentlerin Yöntemi tam olarak aynı tahmin ediciydi. Böylece, λ için maksimum olabilirlik tahmin edicisi sadece

örneklemin ortalamasıdır. X_i'nin ikinci merkezi olmayan momentini kullanarak bir diğer tahmin edici seçeneği aşağıdaki gibi olabilir:

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Bu tahmin edicinin sapmalı olduğunu düşünür müsünüz? Tutarlı olduğunu düşünür müsünüz? Bu bir MLE olduğu için büyük ihtimalle en etkin tahmin edici değildir (yani Var($\tilde{\lambda}$) > Var($\hat{\lambda}$)).