14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

14.30 Sınav 2

Bahar 2008

Açıklamalar: Bu, kitapların ve notların kapalı olduğu bir sınav olacaktır. Hesap makinası kullanabilirsiniz. Lütfen önce sınavı baştan sona okuyarak anlaşılmayan yerleri sorunuz ve sorulara harcayacağınız zamanı ayarlayınız. Hesaplama hatalarının yapılması durumunda kısmı puan almak için lütfen yaptığınız bütün işlemleri gösteriniz. Sınavı bitirmek için aşağı yukarı 85 dakikanız var. İyi şanslar.

1. (24 Puan) Kısa Sorular

Bu sorular için çok fazla zaman harcamayın. Her birisi için kısa cevap yeterli olacaktır.

(a) Rasgele bir X değişkeni verilmişken, X'in standardizasyonu olan Z'yi tanımlayınız ve varyansını türetiniz.

(b) Varsayalım ki $\overline{X}_{25}$ $X_i \sim$ N(1, 4) dağılımlı i.i.d. olan ne = 25 gözlemin ortalamasıdır. Örneklerin ortalaması $\overline{X}_{25}$'in 0.5 ile 1.5 arasında olma olasılığı nedir?

Doğru/yanlış/belirsiz: Eğer doğru ise kısa bir açıklama yazınız (tercihen biraz cebir kullanarak), eğer yanlış ise düzeltmeyi deneyiniz.

(c) Phoenix'te faaliyete bulunan Sunshine Havayolları tarafından gerçekleştirilen uçuşlar Seattle'da faaliyete bulunan Air Grey Skies'a göre ABD'deki bütün önemli havaalanlarında en uzun rötara sahiptir. Bu nedenle, Sunshine Havayollarının rasgele seçilen bir uçuşunun beklenen rötarı Air Grey Skies'ın rasgele seçilen uçuşuna göre daha uzundur.

(d) Merkezi Limit Teoremi bir i.i.d. olan $X_1, \ldots, X_n$ gözlemlerinin bir büyük örnekleminde X_i'lerin normal dağılımlı olduklarını söyler.

2. (20 Puan)

Varsayalım ki X ve Y bağımsız olmak zorunda olmayan rasgele değişkenler olsun ve $0 \leq p \leq 1$'dir.

(a) *Sadece* varyans ve kovaryansın *tanımını* kullanarak aşağıdakini gösteriniz

$$\mathrm{Var}(pX + (1-p)Y) = p^2\mathrm{Var}(X) + 2p(1-p)\mathrm{Cov}(X,Y) + (1-p)^2\mathrm{Var}(Y)$$

(bu problem için, sınıfta türetilen varyansın özeliklerini kullanmamanız gerekiyor)

(b) X ve Y'nin varyansı ve ϱ(X,Y) korelasyon katsayısına göre pX + (1-p)Y'nin varyansı nedir?

(c) Varsayalım ki Var(X) = Var(Y)'dir. pX + (1-p)Y'nin varyansı X'in varyansından büyük müdür, küçük müdür?

(d) Şimdi, X ile Y'nin iki farklı matematik sınavından elde edilen puanlar olduğunu varsayalım. Bir çeşit "matematik yeteneğiyle" ilgileniyorsunuz ve aşağıdaki özelikleriyle, iki puan gürültülü (noisy) (bir ihtimal aralarında korelasyon var) ölçümlüdür:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu, \ \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2, \ \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2, \text{ ve } \ \mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY}$$

Sadece bir ölçümü kullanmak yerine, onları ağırlıklandırılmış bir ortalama pX + (1-p)Y olarak birleştirmeye karar verdiniz. Bu ağırlıklandırılmış ortalamanın beklenen değeri nedir? p'nin hangi değeri ağırlıklandırılmış ortalamanın varyansını minimize eder?

3. (10 puan)

(a) Chebyshev Eşitsizliğine göre (|X - $\mathbb{E}$[X]| > ε) olayının olasılığı, X rasgele değişkenin varyansı Var(X) ile nasıl ilişkilidir?

(b) Sen ve arkadaşın saat 19:30'da Inman Meydanında buluşmayı planlıyorsunuz. Her ikinizde tam zamanında orada olmaya çalışıyorsunuz ve oraya varış zamanlarınız birbirinden bağımsızdır. Ayrıca, varış zamanın (dakika cinsinden) standart sapması σ'nın ikiniz içinde aynı olduğunu varsayalım. En az %92'lik olasılıkla, hiçbirinizin diğerinin 10 dakikadan fazla beklemek zorunda kalmaması için, σ en fazla ne olabilir?

4. (21 puan)

1960'ta delikli kartlar kullanan bir süper bilgisayar ile çalışıyorsunuz. Bu tür makineler için, kodlar kartlara delinirdi. Bu kartlarda eğer ilgili yere bir delik açılmışsa orası bir bit yani "1" olarak, diğer durumlarda "0" olarak okunurdu. Kodu bilgisayara yüklemeden önce, başka bir makine onu farklı bir formattaki delikli karta kopyalamak zorundaydı. Bu süreç tamamen hatasız çalışmıyordu. n bit uzunluğundaki bir kod için, X kadar kopyalama hatası $\lambda = \frac{n}{50000}$ parametreli bir Poisson dağılımıdır, yani Xi $\sim$ P($\frac{n}{50000}$).

(a) Problem hakkında düşünmenin bir yolu şöyledir: n bitlik bir kod kopyalanırken, her bir bit için sabit, fakat küçük, p kadar 1 ile sıfırın yerinin (veya tersi) karıştırılma olasılığı vardır. Eğer farklı bitler arasındaki kopyalama hatalar bağımsız ise, hata sayılarının dağılımı nedir? Eğer n çok büyük ise, yukarıda önerilen gerekçe dışında Poisson dağılımını kullanmanın gerekçesi ne olabilir? – lütfen olabildiğince açık olunuz.

Şimdi varsayalım ki makinenin yapabileceği tek kopyalama hatası “1”i yazması gereken yere yazmaması olsun, örneğin bir kart delikte sıkışmış olsun ve makine onu “1” yerine “0” olarak okusun. Diğer taraftan bütün “0”lar doğru kopyalanacaktır. n uzunluğundaki bir kodda “1”lerin sayısı olan Y’nin “1”in p = 1/2 olasılığıyla binom dağılımlı olduğunu varsayalım.

(b) n uzunluğundaki bir kod için X kopyalama hatasının sayısı için beklenen değer ve varyansı belirleyiniz. Bütün işlemleri gösteriniz. İpucu: λ parametreli bir Poisson dağılımının p.d.f.sinin aşağıdaki gibi olduğunu hatırlayınız:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{eğer } x = 0, 1, 2, \ldots \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

5. (15 Puan)

Varsayalım ki X ~ U[0, 1], [0, 1] aralığında bir uniform dağılımıdır ve Y’nin p.d.f.’si aşağıdaki gibidir:

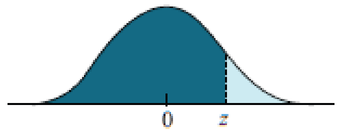
$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y} & \text{eğer } y \leq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Y = u(X)’i sağlayan bir u(.) fonksiyonu belirtiniz (ipucu: Y’nin c.d.f.’si nedir?).

6. (10 Puan)

Varsayalım ki Var(X) = Var(Y) = 1, $\mathbb{E}$[X] = 2, $\mathbb{E}$[Y] = 1 ve korelasyon katsayısı ϱ(X,Y) = $\frac{1}{3}$’tür. İki rasgele değişken arasındaki farkın karesinin beklenen değeri, $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$, nedir?

Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan



(Devam)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3112
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Kaynak: MIT OpenCourseWare

Standart Normal Dağılım Altındaki Birikimli Alan

(Devam)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2..3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	09988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Source: B. W. Lindgren, *Statistical Theory* (New York: Macmillan. 1962), pp. 392-393.

Kaynak: MIT OpenCourseWare