

MIT OpenCourseWare  
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş  
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

## 14.30 Sınav III

Bahar 2009

**Açıklamalar:** Bu, kitapların ve notların kapalı olduğu bir sınav olacaktır. Hesap makinası kullanabilirsiniz. Lütfen önce sınavı baştan sona okuyarak anlaşılmayan yerleri sorunuz ve sorulara harcayacağınız zamanı ayarlayınız. Hesaplama hatalarının yapılması durumunda kısmı puan almak için lütfen yaptığınız bütün işlemleri gösteriniz. Sınavı bitirmek için aşağı yukarı 85 dakikanız var. İyi şanslar.

**1. (15 Puan) Kısa Sorular.** Doğru/Yanlış? Açıklayınız. Eğer yanlış ise, ifadenin doğru halini yazınız.

(a)  $X$  gibi tek bir gözlem verilmiş iken, sabit  $\theta_0$  ve  $\theta_A$  değerleri için eğer  $\theta_A < \theta_0$  ise olabilirlik oranı  $\frac{f_0(X)}{f_A(X)}$ 'in küçük değerlerinde, eğer  $\theta_A > \theta_0$  ise olabilirlik oranının büyük değerlerinde  $H_A : \theta = \theta_A$  'ya karşı  $H_0 : \theta = \theta_0$  basit hipotezinin en güçlü testi ret edilir.

(b)  $\alpha = 0.1$  büyüklüğüne ve  $T(X_1, \dots, X_n)$  istatistiğine dayanarak bir  $H_A : \theta = \theta_A$  'ya karşı  $H_0 : \theta = \theta_0$  hipotezi oluşturmak için, sadece boş hipotez altında  $T(X_1, \dots, X_n)$  dağılımını bilmek zorundayız.

(c) Eğer örneklem büyüklüğü  $n \rightarrow \infty$  iken  $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$  ise, bir  $\hat{\theta}_n$  tahmin edicisi her zaman tutarlıdır.

**2. (25 Puan).** Varsayalım ki  $X \sim U[-\theta, \theta]$  dağılımlı bir rasgele değişken gözlemlediniz. Sadece bir tek gözlemimiz var.

(a)  $\theta$  için bir momentler yöntemi tahmin edicisi bulunuz. Bu tahmin edici sapmasız mı?

(b)  $Y := X^2$ 'nin c.d.f.si olan  $F_Y(y)$  türetiniz.

(c) (b)'deki sonucunuzu kullanarak,  $Y$ 'ye göre  $\theta$  için  $1 - \alpha = 0.9$ 'luk bir güven aralığı oluşturunuz.  $\theta$  için bir sapmasız tahmin ediciye sahip olup olmamak önemli midir?

**3. (35 Puan).** İ.i.d. olan bir  $X_1, \dots, X_n$  örnekleminiz var. Burada  $X_i$   $\lambda$  parametresi ile üstel dağılımlıdır. Bu nedenle  $X_i$ 'nin p.d.f.si aşağıdaki gibidir:

$$f_X(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Varsayalım ki ortalaması  $\bar{X}_n = 1.63$  ve örneklem varyansı  $S_n^2 := \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (X_i - 1.63)^2 = 1.325$  olan 8 gözlemlili bir  $\{0.37, 2.58, 2.04, 2.32, 2.88, 0.29, 2.41, 0.16\}$  örneklemimiz var.  $\lambda$  parametrelili bir üstel değışken için  $\mathbb{E}_\lambda[X] = \frac{1}{\lambda}$  ve  $\text{Var}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda^2}$  olduğunu hatırlayınız.

- $\lambda$  parametresi için olabilirlik fonksiyonunu ve bir  $X_1, \dots, X_n$  örneklemini yazınız.
- Maksimum olabilirlik tahmin edicisini elde ediniz ve verili örneklem için tahmini hesaplayınız.
- $\lambda$  için maksimum olabilirlik tahmin edicisi sapmasız mı? Eğer değilse, sapmalı olduğunu söyleyebilir misiniz? *İpucu: Jensen Eşitsizliğini kullanınız.*

Şimdi de varsayalım ki  $H_A : \lambda = 0.2$ 'ye karşı  $H_0 : \lambda = 0.4$  hipotezinin testi ile ilgileniyoruz. Bunun dışında kurulum önceki gibidir. *İpucu: Bundan sonraki soruları çözmek için (a)-(c) sorularını çözmek zorunda değilsiniz.*

- Verili bir  $\alpha$  güvenilirlik düzeyinde  $H_A : \lambda = 0.2$ 'ye karşı  $H_0 : \lambda = 0.4$  hipotezinin en güçlü testini elde ediniz. Örneklem ortalaması,  $\bar{X}_n$ , cinsinden kritik bölgeyi tanımlayınız. *İpucu: problemin bu bölümü için, kritik düzeyi doğrudan belirlemek zorunda değilsiniz.*
- $\lambda$  parametrelili bir üstel dağılımdan  $n$  sayıda i.i.d.  $X_1, \dots, X_n$ , çekilişli için,  $Y_n := 2\lambda(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ 'in  $2n$  serbestlik derecesiyle  $\chi^2$  dağılımlı olduğu gösterilebilir (bu sonuç çok açık değildir ve bunun için gerekli olan matematik bu dersin kapsamının ötesindedir).  $\alpha = 0.1$  ile 1.nci Tip hatanın olasılığını gerçekleştirmek için, (d)'deki testten örneklem ortalaması için nasıl kritik değeri seçersiniz? Yukarıda verilen 8 örneklem büyüklüğü için boş hipotezi ret eder misiniz?

**4. (15 Puan)** Yeni bir ilacın kan basıncını düşürüp düşürmediğini belirlemesi gereken bir rasgele deney tasarlıyorsunuz. Varsayalım ki, ilacı aktif olarak alan bir denek grubundan  $n_1$  gözlemlili bir i.i.d. örneklem,  $X_1, \dots, X_{n_1}$ , ve kendisine sahte ilaç verilen kontrol grubundan  $n_2$  gözlemlili bir başka i.i.d. örneklem,  $Z_1, \dots, Z_{n_2}$ , belirlediniz. İki örneklem karşılıklı dışlayandır ve  $\sigma_X^2$  ve  $\sigma_Z^2$  değerleri bilinen  $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  ile  $Z_i \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$  dağılımları mevcuttur.

(a) Varsayalım ki  $H_A : \mu_Z > \mu_X$ 'e karşı  $H_0 : \mu_X = \mu_Z$ 'yi test etmek istiyorsunuz. Örneklem ortalamasının farkı olan  $\bar{X}_{n_1} - \bar{Z}_{n_2}$ 'nin varyansını hesaplayınız ve  $\alpha = 0.05$  güvenilirlik düzeyinde  $\bar{X}_{n_1} - \bar{Z}_{n_2}$  için bir test oluşturunuz.

(b) Bu testin gücünü  $\mu_X - \mu_Z$ 'nin bir fonksiyonu olarak türetiniz. Güc  $\bar{X}_{n_1} - \bar{Z}_{n_2}$ 'nin varyansına nasıl bağılıdır?

(c) Varsayalım ki  $n$  sayıdaki deneği  $n_1 = \gamma n$  büyüklüğündeki bir denek grubu ve  $n_2 = (1 - \gamma)n$  kontrol grubu arasında bölüştürüyorsunuz.  $c := \frac{\sigma_X}{\sigma_Z}$  oranına bağlı olarak, deneklerin denek grubuna yerleşim oranı  $\gamma$ 'in optimal değeri nedir? Eğer  $\sigma_X^2 > \sigma_Z^2$  ise,  $n$  deneğin yarısından fazlasının mı yoksa azının mı denek grubuna yerleştirmeniz gerekir?