

Sloan Yönetim Okulu 15.010/15.011

Massachusetts Teknoloji Enstitüsü

PROBLEM ÇÖZME NOTLARI #7

Temel Oyun Teorisi

Cuma - Kasım 5, 2004

BUGÜNÜN PROBLEM ÇÖZMEİN ÖZETİ

1. Oyun teorisi tanımları: oyun teorisindeki en önemli kavramların tanımları
2. Cournot Modeli: iki firma aynı anda homojen bir ürünün çıktı miktarı üzerine rekabet ediyorsa ne olur
3. Stackelberg Modeli: iki firma ard arda homojen bir ürünün çıktı miktarı üzerinden rekabet ediyorsa ne olur
4. Bertrand Modeli: iki firma aynı anda homojen bir ürünün fiyatı üzerinden rekabet ediyorsa ne olur.
5. Sayısal Örnekler: bu kavramların alıştırmalara uygulanması.

## 1. OYUN TEORİSİ TANIMLARI

### 1.1 Dominant strateji

### 1.2 Nash Dengesi

### 1.3 Maximin strateji

#### 1.1 Dominant Strateji

Bir oyuncu dominant stratejiye sahiptir eğer karşısındaki ne yaparsa yapsın seçimi optimalse. Bir strateji dominanttır eğer diğer oyuncunun hamlesi ne olursa olsun en az herhangi diğer strateji kadar öder. I

#### 1.2 Nash Dengesi

Nash Dengesinde, her bir firma rakibinin ne yapacağı verilmiş durumda yapabileceğinin en iyisini yapar. Nash dengeleri çoğunlukla işbirlikçi/dayanımcı olmayan sonuçlardır. Her bir firma karşısındakinin ne yapacağını verildiği durumda karını maksimize eden stratejiyi seçer. Dengede stratejileri değiştirmek için herhangi bir teşvik yoktur çünkü çıktı/getiriyi daha fazla geliştiremezsiniz.

#### 1.3 Maximin Strateji

Bir oyuncunun olabilecek en kötü çıktı/gelirini minimize eden stratejidir. Bu strateji oyuncular karşılındakilerin rasyonelitesinden endişe ettiklerinde kullanılabilir.

## 2. COURNOT MODELİ

### 2.1 Tanım

### 2.2 Cournot dengesinde optimizasyon

#### 2.1 Tanım

Cournot modeli bir period oyunudur, iki firma bilinen talep eğrisi olan bir farklılaştırılmamış ürün üretirler. İki firma aynı anda üretim miktarlarını seçerek rekabet ederler. Her bir firma diğerinin çıktısının sabit olduğunu varsayarak kendi miktarını  $Q$  seçer.

#### 2.2 Cournot oyununda optimizasyon

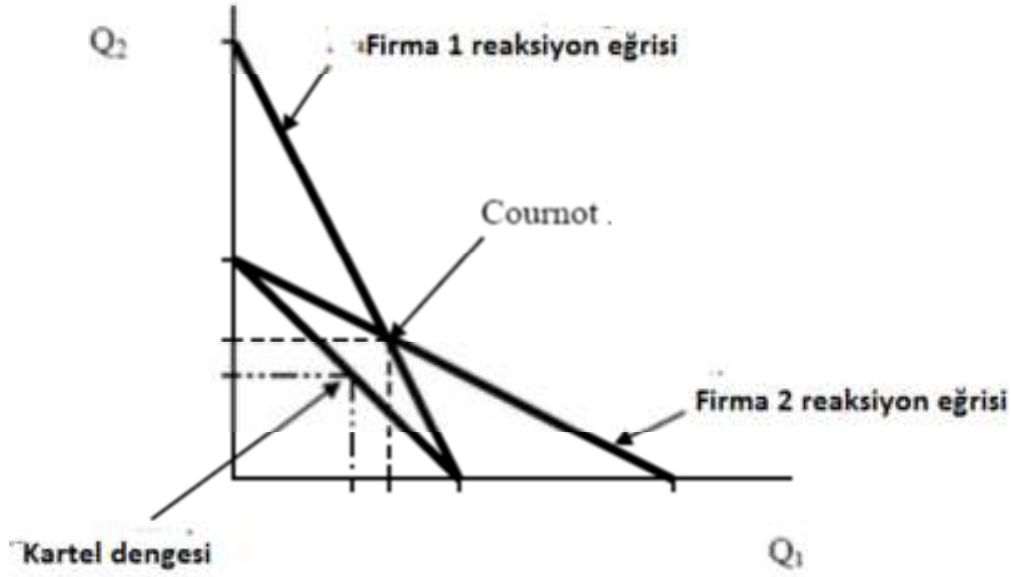
Cournot oyununda, her bir firma doğru bir şekilde karşısındakinin çıktısını varsayarsa ve kendi karını maksimize eden bir çıktı seviyesi  $Q$  seçerse dengeye erişilir. Her iki firma içinde bu dengeyi değiştirmek için teşvik yoktur.

Dolayısıyla piyasa talebi verildiğinde  $Q(P)$  ve iki üreticinin üretim seviyeleri verildiğinde  $Q = Q_1 + Q_2$ , karı maksimize etmek için her bir şirketin yapması gereken:

1.  $Q_1$  ve  $Q_2$  fonksiyonu olarak marjinal geliri hesaplamak ( $Q=Q_1+Q_2$  denklemini kullanarak)
2. Bu marjinal geliri marjinal maliyete eşitlemek
3. Miktar için çözümlenmek. Bunu yaparak, her bir şirket için optimal miktar seviyesi diğer firmanın çıktısının fonksiyonu olan denklemlerle verilmiştir. Bu denklemler reaksiyon eğrisi denir ve her bir firmanın diğer üretilen miktarlar verildiği durumdaki optimal miktar seviyesini gösterir:

$$Q_1^* = f(Q_2) \text{ ve } Q_2^* = f(Q_1)$$

Grafikle:



NOT: Bir Cournot dengesi bir Nash dengesine bir örnektir.

### 3. STACKELBERG MODELİ

#### 3.1 Tanım

#### 3.2 Stackelberg modelinde optimizasyon

#### 3.1 Tanım

Bu bir periyodluk bir oyundur, iki firma bilinen talebe sahip farklılaştırılmamış bir ürün üretirler. Firmalar  $Q_1$  ve  $Q_2$  çıktı miktarlarını üretmek için seçerek rekabet etmek zorundadır, fakat iki firmadan biri önce seçer.

Firma 2 Firma 1'in ne kadar  $Q_1$  seçtiğini gözlemler ve  $Q_2$  yi karını maksimize etmek için seçer. Bundan öte Firma 1 Firma 2 nin bu stratejiyi yapacağını bilir çünkü diğer firmanın iktisadi rasyonelitesine güvenir.

#### 3.2 Stackelberg modelinde optimizasyon

Stackelberg modelinde, Firma 1 çıktısını genişletir ve daha çok karı garantilerse denge noktasına ulaşılır. Yani " ilk hareket eden avantajı" kavramı. Firma 2 daha az çıktıya zorlanır eğer liderin (firma 1) hali hazırda büyük çıktı ürettiği verildiğinde (" Ben daha fazla üretirsem sendaha üreterek reaksiyon gösterirsin").

### 4. BERTRAND MODELİ

#### 4.1 Tanım

#### 4.2 Bertrand modelinde optimizasyon

#### 4.1 Tanım

Eğer iki firma bir homojen mal satıyorsa ve bu mallar için aynı anda optimal fiyat seviyelerini seçmek zorundaysa (P1 ve P2,) bu durumu analiz etmek için Bertrand Model ini kullanırız.

#### 4.2 Bertrand modelinde optimizasyon

Homojen mallard, tüketiciler çok açık kı malı daha düşük fiyattan veren firmadan alırlar. Her bir firmanın dolayısıyla karşısındakinin fiyatından çok az daha azaltmaya ve bütün talebi ele geçirmeye teşviki vardır.

Sonuç olarak dengeye ulaşılır eğer her bir frma:

$$P=MC$$

Ki her bir firma iktisadi olarak mümkünse karşısındakini kısıtlar (başka bir deyişle fiyat düşürmek aynı zamanda zarara yol açmadığı sürece diğerinin fiyatından çok az daha azaltırlar. Şunu aklınızda tutun ki şirketler için rasyonel savranışı varsayıyoruz).

NOT: Eğer ürünler farklılaştırılmışsa dengeye MC üstünde olan fiyatlarda erişilir ve firmalar kar yapabililer (daha düşük fiyat bütün talebi yok etmez!) Aynı zamanda , eğer oyun ard arda oynanırsa ve mallar farklılaştırılmışsa ikinci hareket eden oyuncu birinciye göre çok önemli avantaja sahip olur. Aynı zamanda not edin ki firmalar için Cournot modelindeki gibi miktar üzerinden (fiyat yerine) rekabet etmek daha iyidir. Çünkü firmalar fiyat üzerinden rekabet ederlerse fiyatlar marjinal maliyete doğru iner ve sonuç olarak iktisadi karlar azalır.

### 5. SAYISAL ÖRNEKLER

#### 5.1 Oyun teorisine örnekler

#### 5.2 Cournot oyunlarına örnekler

#### 5.3 Bir Stackelbergoyununa örnek

#### 5.1 Oyun teorisne örnekler

##### 5.1.1 Amerika – Japonya Ticaret İlişkileri

Bu problem 7, Bölüm 13 P&R. İki ülke ithalat piyasalarını açıp kapamak için politikalar düşünüyorlar. Kazanım matrisi aşağıda gösterilmiştir [Amerika kazanımı, Japonya kazanımı].

US	Japan Açık	Kapalı
Açık	10,10	5,5
Kapalı	-100,5	1,1

a. Varsayalım ki her bir ülke kazanım matrisini biliyor ve diğer ülkenin kendi mefaati için hareket edeceğine inanıyor. Herhangi bir ülkenin dominant stratejisi var mıdır? Eğer her bir ülke kendi refahını maksimize etmek için rasyonel hareket ederse denge politikaları ne olur?

Dominant Strateji

- Japonya: Amerika ne yaparsa yapsın piyasayı açmayı seçecektir (bu her zaman karı maksimize eden karardır).
- Amerika: Japonya ne yaparsa yapsın piyasayı açmayı seçecektir.

Denge

- Dominant stratejiler tarafından dikte edilen denge her iki ülke için ithalat piyasalarını açmaktır. Bu nash dengesidir. Neden?

b. Şimdi varsayalım ki Japonya Amerikanın rasyonel davranacağından emin değil. Japonya Amerika siyasetçilerinin refahı maksimize etmese de japonyayı cezalandırmak isteyebileceğinden endişeli. Bu japonyanın stratejisini nasıl etkileyebilir? Dengeyi nasıl değiştirebilir?

Soru Japonyanın maximin stratejisini istiyor. (Amerika'nın irrasyonel davrandığını varsayarsak Japonyanın çıktısını maksimize eden strateji). Japonya'nın maximin stratejisi yine ithalat sektörünü açmak olamaya devam edecektir. Japonyanın açık ithalat piyasasıyla Amerika daha kötü olacaktır bu durum yine açık-açık senaryosuna getirecektir.

### 5.1.2 Bilgisarlar

Alıştırma 3, Bölüm 13 P&R. İki bilgisayar firması A ve B ofis bilgi yönetimi için piyasa ağ sistemi planlıyorlar. Her bir firma ya hızlı, yüksek kalite sistem(H), ya daha yavaş, düşük kalite sistem(L) geliştirebilir. Piyasa araştırmasına göre her bir firmanın alternative stratejileri için sonuçlanan karları aşağıdaki kazanım matrisinde verilmiştir: [A kazanım, B kazanım]

Firma A	Firma B	
	H	L
H	30,30	50,35
L	40,60	20,20

a. Herhangi bir oyuncunun dominant stratejisi var mı? Nash dengesi ne

- kazanım matrisine göre hiçbir oyuncunun dominant stratejisi yok. İki Nash dengesi var (matriste yuvarlak içine alınmış).

b. Eğer her ikisi de maxi-min stratejisi uygularsa ne olur? Maxi-min çıktısı anlamlı mı (Rakipler onu seçer mi?)?

- Firma A dan başlayalım. Maximin stratejisi olabilecek en kötü çıktıyı engeller (Düşük / Düşük, veya \$20). Firma A en kötü senaryoyu engellemek için yüksek kalite istemi üretecektir.

- Benzer bir şekilde, Firma B de en kötü senaryoyu engelleyecektir (Düşük / Düşük, veya \$20). O da yüksek kalite sistemini üretmeyi seçecektir.

- her iki firmanın da maxi-min strateji uyguladığı sonuç Yüksek-Yüksek olur. Bu Nash dengesiyle karşılaştırıldığında sub-optimaldir. Fakat, bu aynı anda oynana bir oyun olduğu için oyuncular arasında kordinasyon zor olabilir. Bu hiçbir oyuncunun dominant stratejisi olmadığı durumlar için özellikle önemlidir..

- Maxi-min stratejisi kordinasyonun başarılı olması zor olduğunda aynı anda oynan oyunlar için anlamlı olabilir.

c. A ilk bağlılık ederse çıktı ne olur? Eğer B ilk bağlılık ederse?

- Eğer A ilk bağlılık ederse: A B'nin ya yüksek ya düşük oynayacağı durumda Bnin cevabının ne olacağını bilir. A bu durumda en yüksek kazanım getiren çıktıyı seçecektir( Yüksek üretmek, Byi Düşük üretmeye zorlamak).

- Eğer B ilk bağlılık ederse: Benzer bir şekilde, B A'nin ya yüksek ya düşük oynayacağı durumda Anın cevabının ne olacağını bilir. B bu durumda en yüksek kazanım getiren çıktıyı seçecektir( Yüksek üretmek, Ayı Düşük üretmeye zorlamak).

- Bu çıktı Stackelberg Modeline benzer; ilk hareket edenin vanatajı var.

d. Önde hareket etmek paraya mal olur – İki basamaklı bir oyunu ele alalım, ilk basamakta, her bir firma ilk hareket eden olmak için bir miktar ödeme yapıyor. Hangi firma en çok öder? Hangi firma ilk hareket eden olur?

- Firma B \$25 harcamaya razı (60-35) yüksek sütununda olmak için. Firma maksimum \$10 harcamaya razı (50-40) yüksek satırında olmak için. dolayısıyla firma B firma A dan daha fazla harcar. Firma B \$11 teklif edebilmeli ve ilk hareket eden pozisyonunu kazanmalı.

5.1.3 Bağımlılık ve Kredibilite (Kayde alınan)

Bu durum için daha derin analizleri sayfa 481 P&R. Bu ard arda oynana bir oyun,ve Arabalar lider. Ne çeşit arabalar inşa edeceğine karar vermeil ve sonra Motor ne çeşit motor üreteceğine karar verecek. Aşağıdaki kazanım matrisi bu oyundaki olası çıktıları gösteriyor. [Motor, Arabalar]

	Küçük araba	Büyük araba
Küçük motor	3,6	3,0
Büyük motor	1,1	8,3

Arabalar küçük arabalar üretirse en iyisini yapar. Biliyor ki buna cevaben Motor küçük motorlar üretecek. Motor,fakat, matrisin sağ aşağısında alan köşesini tercih edecektir. Arabalar un küçük araba yerine büyük araba üretmesini sağlayabilir mi?

- Motor büyük motor üreteceğine dair tehdit edebilir. Fakat bu tehdit inanılır/kayde alınır değil çünkü küçük araba ürettiği zaman büyük motor üretmesi için hiç teşvik yok.
- Bu tehditi kayde alınır yapabilmek için Motor yapabileceği bir şey küçük motor üretme kazanımını azaltmak. Örneğin, küçük motor üretim kapasitesini kapamak.
- Motor küçük motor üretim kapasitesini kapamakırsa yeni denge ne olur?

	Race Car Motors Small cars	Big cars
Far Out Engines Small engines	0,6	0,0
Big Engines	1,1	8,3

## 5.2 Cournot Dengesi Örneği

### 5.2.1 dünkü derste görülen örnek

Varsayalım ki iki firma şu talep eğrisiyle yüzleşiyor:

$$P = 60 - Q$$

Ve ikisinin de marjinal maliyetleri sıfıra eşit. ( $MC_1 = MC_2 = 0$ )

$$\text{Endüstrideki toplam üretim } QTOT = Q_1 + Q_2$$

Karı maksimize etmek için, firma 1 aşağıdakini hesaplar:

$$MR = MC$$

MR şöyle hesaplarız:

$$\begin{aligned} R1 &= PQ1 = (60 - Q)Q1 \\ &= 60Q1 - (Q1 + Q2)Q1 \\ &= 60Q1 - (Q1)^2 - Q2Q1 \end{aligned}$$

ve:

$$MR1 = dR1/dQ1 = 60 - 2Q1 - Q2$$

$MR1 = MC = 0$ , ilk şirket reaksiyon eğrisini hesaplayabilir:

$$Q1 = 30 - \frac{1}{2} Q2$$

Benzer bir şekilde, maliyet yapılarının aynı olduğunu ele alırsak ikinci firma için reaksiyon eğrisi:

$$Q2 = 30 - \frac{1}{2} Q1$$

Denge iki reaksiyon eğrisi eşit olunca sağlanır ( çünkü reaksiyon eğrileri tam simetrik) veya:

$$Q1 = Q2$$

Bu durumda denge:  $Q1 = Q2 = 20$

Üretilen toplam miktar:  $Q = Q1 + Q2 = 40$

Optimal fiyat:  $P = 60 - Q = 20$

Ve firma karı:  $\Pi1 = \Pi2 = 20 \cdot 20 = 400$

### 5.2.2 Cournot Dengesinde Tişört Piyasası

Latin C-Fonksiyonu için tişört üreten bir firmanın üst düzey yöneticisisiniz (Boston Magazinine göre "Best C-Function" yılı ve Best of Boston Hall-of-Famer). Duopol olarak üretim yaptığınızı varsayın. Hem kendiniz hem de rakibimiz şimdi ne kadar tişört üreteceğinize karar vermelisiniz. ( tişört üretmek bazı öncü vakit içeriyor) Bir kere ne kadar tişört üreteceğinize karar verdiğinizde kararınızı geri döndüremezsiniz ve ikinci set tişört üretemezsiniz (yani "oyunu "bir kez oynayabilirsiniz). Varsayın ki sizin ve rakibinizin tişörtleri aynı ( yani farklılaştırılmamış ürünler).

Tişörtlerin talebini analiz eden bir piyasa çalışması var (sizing de rakibinizin de erişebileceği) Piyasa talebi:

$$Q=100-P$$

Yani  $P=100-Q = 100 - (Q1+Q2) = 100 - Q1 - Q2$

Senin ve rakibinin sabit marjinal maliyetiniz  $MC1=MC2=10$



Ne kadar tişört üretmelisiniz?

Cournot modelinde, her bir firma rakibinin çıktısının sabit olduğunu farz eder ve kendi karını maksimize eden çıktıyı seçer. Bu varsayıma göre, her bir firmanın reaksiyon eğrisini hesaplayabiliriz. En iyi cevap fonksiyonunu Firma 1'in optimum miktarı,  $Q_1$ , olarak ele alalım ki Firma 2'nin miktarı  $Q_2$  seçtiğini düşünürsek. Bunu yapmak için ilk olarak Firma 1'in marjinal gelir fonksiyonunu  $MR_1$  hesaplamalıyız

$$TR_1 = P * Q_1 = (100 - Q_1 - Q_2) * Q_1$$

$$MR_1 = dTR_1 / dQ_1 = 100 - 2*Q_1 - Q_2$$

Firma 1'in karını maksimize etmek için  $MR_1 = MC_1$

$$100 - 2 * Q_1 - Q_2 = 10$$

$$Q_1^* = 45 - 0.5 * Q_2$$

Bu denklem Firma 1'in reaksiyon eğrisi; Optimum  $Q_1$  hesaplayalım  $Q_2$  verildiğinde. Eğer Firma 1 karşısındakinin  $Q_2 = 22.5$  birim üreteceğine inanırsa, Firma 1  $Q_1 = 33.75$  üretmeli. Eğer Firma 1  $Q_2 = 45$  olarak varsayarsa,  $Q_1 = 22.5$  üretmeli.

Benzer bir şekilde, Firma 2'nin reaksiyon eğrisini çıkarırız ( aynı maliyetler ve talep verildiğinde bu simetriktir)

$$Q_2^* = 45 - 0.5 * Q_1$$

Dersten biliyorsunuz ki Cournot Dengesi iki reaksiyon fonksiyonunun kesişme noktasındadır ( aynı zamanda Nash Dengedir). İki bilinmeyenli denklem var ve  $Q_1^*$  ve  $Q_2^*$  için çözülür.

Firma 1 için kendi en iyi cevap fonksiyonuyla başlıyoruz:

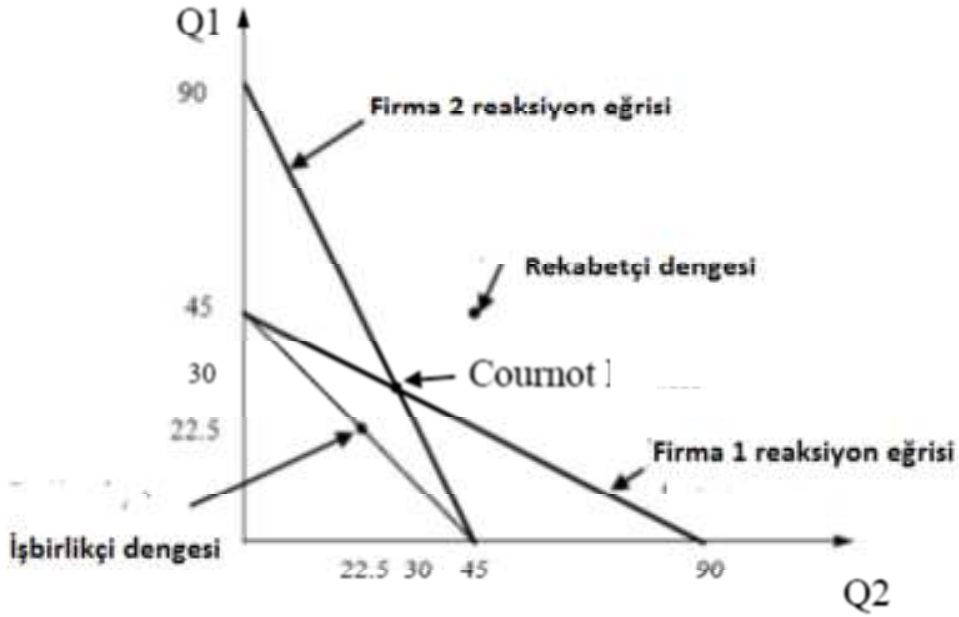
$$Q_1^* = 45 - 0.5 * Q_2$$

Ve Firma 2 için olan en iyi cevap fonksiyonuna koyarsanız :

$$Q_1^* = 45 - 0.5 * (45 - 0.5 * Q_1)$$

$$Q_1^* = 30$$

Denkleimde yerine koyunca  $Q_2^* \Rightarrow Q_2^* = 30$



Cournot Dengesinde her bir firma karşısındakinin çıktı kararı verildiği durumda en iyisini yapar. Daha fazla veya daha az üretmeye bir teşvik yoktur çünkü Her iki firma da karlarını maksimize ederler ( diğ er firmanın çıktısı verildiğinde).

Şimdi fiyat ve karlar eşittir:

$$P = 100 - (30 + 30)$$

$$\Rightarrow P^* = 40$$

$$\pi_1 = TR_1 - TC_1 = P^*Q_1^* - 10^*Q_1 = 40^*30 - 10^*30 = 900$$

$$\text{Simetriyle } \pi_2 = 900$$

Hala 30 birim üretmenin optimal karar olduğuna ikna olmadınız. Aşağıdaki kazanım matrisini inceleyelim. Kazanım matrisi size verilen Q1 ve Q2 çıktılarının kombinasyonu için Firma 1 ve Firma 2 karını verir. Burda her bir firma için dört farklı çıktı seviyesi seçeriz ve sonuç olan karları hesaplarız. Bu sayıları onaylamayı size bırakıyoruz. Gelecekteki birkaç hafta içinde bu kavramı örneklerle yeniden bakma şansınız olacak.

Firma 1'in kararları ilk sütundadır( bu durumda Firma 1'in miktar kararları). Firma 2'nin kararları ilk satırdadır. Firma 1'in kazanımı her hücrenin solunda ve Firma 2'nin kazanımı sağda. altı çizilen bir firma için diğ er firmanın kararının verildiği durumda optimal kararı gösterir. ( örneğin Firma 2 22.5 eçer dolayısıyla Firma 1 için en iyi karar 33.75 olur ki o da 1139.1 kar getiri).

		Firma 2 çıktı			
		22.5	30	33.75	45
Firma 1 çıktı	22.5	1012.5, 1012.5	843.8, 1125.0	759.4, 1139.1	506.3, 1012.5
	30	1125.0, 843.8	900.0, 900.0	787.5, 885.9	450.0, 675.0
	33.75	1139.1, 759.4	885.9, 787.5	759.4, 759.4	379.7, 506.3
	45	1012.5, 506.3	675.0, 450.0	506.3, 379.7	0.0, 0.0

Cournot-Nash Dengesi

Bu kazanım matrisinden en iyi çıktı kararına nasıl anlarız? Rakibinizin çıktısının 22.5 birim olduğunu beklediğini varsayalım. Bu varsayım verildiğinde sizin de 22.5 üretmeniz gerekir mi? Hayır, bu durumda 33.75 birim üreterek daha da yüksek kar elde edersiniz ( $\pi_1 = 1139$ ). Bunu bilerek, sizin rakibiniz neden 22.5 üretmek zorunda? Sizin 33.75 ürettiğinizi varsayarsak O da karını maksimize etmek için 30 birim üretir. Rakibinizin 30 birim ürettiğini varsayarsak siz de 30 birim üretirsiniz. Cournot Dengesi  $Q_1 = 30, Q_2 = 30$  tek çıktıdır.

### 5.3 Stackelberg Oyununa Örnek

Önceki tişört örneğini tekrar ele alalım. Yine sizin çıktınızı seçecek ilk firma olduğunu varsayalım. Şimdi karşınızdakinin reaksiyon eğrisini ele alabilirsiniz. Firma 2'nin çıktı kararı sizin çıktınızla belirlenecektir. Önceki örnekteki gibi karşınızdakinin reaksiyon fonksiyonunu biliyorsunuz:

$$Q_2^* = 45 - 0.5 * Q_1 \quad \text{Denklem (I)}$$

Bu bilgiyle marjinal gelir fonksiyonunu hesaplayabilirsiniz:

$$TR_1 = P * Q_1 = (100 - (Q_1 + Q_2)) * Q_1$$

Denklem (I) ikame edersek – Bu ikame gerekli çünkü eğer miktarı ilk belirlersek rakibinizin reaksiyonunu kaydetmek istersiniz. Eğer miktarı =  $Q_1$  olarak koyarsanız, rakibiniz miktarı Denklem I verildiğinde.

$$TR_1 = (100 - (Q_1 + 45 - 0.5 * Q_1)) * Q_1$$

$$= 55 * Q_1 - 0.5 * Q_1^2$$

$$\Rightarrow MR_1 = dTR_1 / dQ_1 = 55 - Q_1$$

Karını maksimize etmek için  $MR_1 = MC_1$ :

$$\Rightarrow 55 - Q_1 = 10$$

$$\Rightarrow Q_1 = 45$$

Bu sayıyı Denklem (I) koyarsak, Firma2  $Q_2 = 22.5$  birim üretir. Karlar  $\pi_1 = 1012.5$  ve  $\pi_2 = 506$ . Miktar seviyenizi ilk belirlerseniz daha iyi yaparsınız. İlk hareket avantajınız olur. Çıktınızı sabitliyerek piyasayı ilk ete geçirisiniz. Kendinizin 4 tişört yaptığınıza bağlı olduğunuzu/sadık kaldığınızı varsayarsak rakibinizin bunu Kabul etmekten başka çaresi olmaz ve daha a z üretmeye zorlanır, karını maksimize etmek istediği varsayılırsa.